Matemáticas básicas

Manuel Barrantes

editora LEALTAD sac

Título: MATEMÁTICAS BÁSICAS

©	Derechos de edición	:	**Editora LEALTAD S.A.C.** Calle Barlovento 310, Urb. Residencial Higuereta, Santiago de Surco Telf.: 271-3443
	Dirección general	:	Dr. Manuel A. Coronado Aguilar
	Cuidado de la edición	:	Mg. María Elena Rafajlovski
	Diagramación	:	Luz Moreno Valverde
	Ilustraciones	:	José Medina Gutiérrez
	Corrección de texto	:	Saúl Ames Pazos
©	Derechos de autor	:	**Manuel Barrantes Segura**

Primera edición, enero 2010 - 2000 ejemplares
Primera reimpresión, noviembre 2010 - 1500 ejemplares
Segunda reimpresión, marzo 2011 - 1000 ejemplares
Tercera reimpresión, agosto 2011 - 2000 ejemplares
Cuarta reimpresión, febrero 2012 - 1000 ejemplares
Quinta reimpresión, julio 2012 - 2000 ejemplares
Sexta reimpresión, diciembre 2012 - 1000 ejemplares

ISBN N°: 978-612-45527-9-3
Registro de Proyecto Editorial N°: 31501300900537
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N°: 2012-14866

Impreso en los talleres gráficos de **DISTRIBUIDORA DON JOAQUÍN SAC**
Calle Barlovento 310, Urb. Residencial Higuereta. Santiago de Surco.
Telf.: 271-3443

Impreso en el Perú/*Printed in Peru*

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN 9

U N I D A D I
***Conceptos Elementales* 11**

1. CONJUNTOS DE NÚMEROS 13
- 1.1 Números naturales 13
- 1.2 Números enteros 13
  - 1.2.1 Suma 14
  - 1.2.2 Multiplicación 14
- 1.3 Números racionales 15
  - 1.3.1 Fracciones equivalentes 16
  - 1.3.2 Operaciones con fracciones 16
    - a. Suma 16
    - b. Multiplicación 17
    - c. División 18
  - 1.3.3 Decimales 18
  - 1.3.4 Transformación de decimales a fracciones 19
    - a. Decimales exactos 19
    - b. Decimales inexactos periódicos 19
- Ejercicios resueltos 20
- Ejercicios propuestos 23

2. ARITMÉTICA: RAZONES Y PROPORCIONES 25
- 2.1 Razón 25
- 2.2 Proporción 25
  - 2.2.1 Proporción discreta 25
  - 2.2.2 Proporción continua 26
- 2.3 Media proporcional 26
  - 2.3.1 Media aritmética 26
  - 2.3.2 Media geométrica 26
  - 2.3.3 Media armónica 27
- 2.4 Proporcionalidad 27
  - 2.4.1 Magnitudes proporcionales 27
    - a. Magnitudes directamente proporcionales (DP) 27
    - b. Magnitudes inversamente proporcionales (IP) 28
  - 2.4.2 Reparto proporcional 28
    - a. Reparto directamente proporcional 28
    - b. Reparto inversamente proporcional 29
  - 2.4.3 Fórmulas de proporcionalidad... 31
- 2.5 Porcentajes 33
- Ejercicios resueltos 34
- Ejercicios propuestos 43

3. ÁLGEBRA: POTENCIACIÓN, PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN 47
- 3.1 Potenciación 47
  - 3.1.1 Definición 47
  - 3.1.2 Propiedades 47
- 3.2 Productos notables 48
  - 3.2.1 Definición 48
  - 3.2.2 Principales productos notables 48
- 3.3 Factorización 49
  - 3.3.1 Definición 49
  - 3.3.2 Principales métodos para factorizar 49
- Ejercicios propuestos 53

U N I D A D II
***Lógica Proposicional y Teoría de Conjuntos* 55**

4. INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA PROPOSICIONAL 57
- 4.1 Definición 57
- 4.2 Lógica proposicional 57
  - 4.2.1 Proposiciones simples 57
  - 4.2.2 Proposiciones compuestas 58
- 4.3 El lenguaje de la lógica proposicional 59
  - 4.3.1 Símbolos 59
  - 4.3.2 Reglas de formación 59
  - 4.3.3 El Estado Posible del Mundo (EPM) 59
  - 4.3.4 Interpretación de los operadores.. 60
    - a. Negación (no...) 60
    - b. Conjunción (... y...) 60
    - c. Disyunción (... o...) 61
    - d. Condicional (si..., entonces...) 62
    - e. Bicondicional (... si y sólo si...) 62

4.3.5 Simbolización de las proposiciones 63
4.3.6 Análisis de las fbf 64
4.4 Proposiciones especiales 65
4.5 Lógica cuantificacional 66
4.5.1 Funciones proposicionales 67
4.5.2 Cuantificadores 67
a. Clasificación 68
b. Expresión gráfica de los cuantificadores 68
c. Negación de afirmaciones... 69
d. Implicaciones materiales...... 69
Ejercicios resueltos 71
Ejercicios propuestos 75

5. CONJUNTOS 77
5.1 Definiciones 77
5.2 Nomenclatura 77
5.3 Determinación de conjuntos 77
5.3.1 Por extensión 77
5.3.2 Por comprensión 78
5.3.3 Por el diagrama de Venn 78
5.4 Subconjuntos 81
5.4.1 Definición 81
5.4.2 Propiedades 81
5.4.3 Conjunto potencia P(A) 82
Ejercicios resueltos 84
Ejercicios propuestos 89

6. OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS.... 91
6.1 Unión (∪) 91
6.1.1 Definición 91
6.1.2 Propiedades 92
6.2 Intersección(∩) 93
6.2.1 Definición 93
6.2.2 Propiedades 94
6.3 Diferencia 95
6.3.1 Definición 95
6.3.2 Propiedades 96
6.4 Complemento 97
6.4.1 Definición 97
6.4.2 Propiedades 97
Ejercicios resueltos 100
Ejercicios propuestos 105

U N I D A D III
Números Reales 107

7. NÚMEROS REALES Y RECTA REAL......... 109
7.1 Aproximación y notación científica........... 110
7.2 Radicación 111
7.2.1 Propiedades 111
7.2.2 Racionalización 112
a. Denominador monomio irracional 112
b. Denominador binomio irracional 113
7.3 Recta real (intervalos) 113
7.4 Valor absoluto 115
Ejercicios resueltos 116
Ejercicios propuestos 122

8. ECUACIONES 125
8.1 Ecuaciones lineales 125
8.2 Ecuaciones cuadráticas 125
8.2.1 Fórmula general 126
8.2.2 Factorización 126
8.3 Ecuaciones fraccionarias 127
8.4 Ecuaciones irracionales 129
8.5 Ecuaciones con valor absoluto 130
8.6 Sistemas de ecuaciones lineales 131
8.6.1 Sustitución 131
8.6.2 Reducción 131
Ejercicios resueltos 132
Ejercicios propuestos 140

9. INECUACIONES 145
9.1 Inecuaciones de primer grado 145
9.2 Inecuaciones de grado mayor que 1 146
9.3 Inecuaciones con valor absoluto 147
9.3.1 Primer caso: Inecuaciones del tipo $|x| > b$ 147
9.3.2 Segundo caso: Inecuaciones del tipo $|x| < b$ 147
Ejercicios resueltos 148
Ejercicios propuestos 152

U N I D A D IV
Funciones Reales de Variable Real 155

10. FUNCIONES 157
10.1 Definición 157
10.2 Regla de correspondencia 157
10.3 Dominio de una función 160
10.4 Rango de una función 160
10.5 Tipos de funciones 161
10.5.1 Función inyectiva 161
10.5.2 Función sobreyectiva 163
10.5.3 Función biyectiva 163
10.6 Funciones elementales 164
10.6.1 Función lineal 164
10.6.2 Función cuadrática 165
10.6.3 Función polinómica 166
10.6.4 Función racional 167
10.6.5 Función irracional 168
Ejercicios resueltos 169
Ejercicios propuestos 178

11. OPERACIONES CON FUNCIONES........... 182
11.1 Suma de funciones 182
11.2 Diferencia de funciones 183
11.3 Producto de funciones 184

11.4 División de funciones ... 185
11.5 Composición de funciones ... 186
11.6 Función inversa ... 188
Ejercicios resueltos ... 190
Ejercicios propuestos ... 200

12. FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA ... 204
12.1 Función exponencial ... 204
12.1.1 Definición ... 204
12.1.2 Propiedades ... 204
12.2 Función logarítmica ... 208
12.2.1 Definición ... 208
12.2.2 Propiedades ... 208
Ejercicios resueltos ... 211
Ejercicios propuestos ... 216

U N I D A D V
***Cálculo Diferencial* ... 219**

13. LÍMITES ... 221
13.1 Definición ... 221
13.2 Propiedades ... 223
13.3 Límites laterales ... 224
13.4 Continuidad ... 225
13.4.1 Discontinuidad evitable ... 225
13.4.2 Discontinuidad de salto ... 225
13.4.3 Discontinuidad asintótica ... 225
13.4.4 Discontinuidad esencial ... 225
Ejercicios resueltos ... 226
Ejercicios propuestos ... 232

14. DERIVADAS ... 236
14.1 Definición ... 236
14.2 Funciones algebraicas ... 237
14.3 Regla de la cadena ... 239
14.4 Funciones trascendentes ... 239
14.4.1 Funciones trigonométricas ... 239
14.4.2 Funciones logarítmicas ... 240
14.4.3 Funciones exponenciales ... 240
14.5 Derivación implicita ... 241
14.6 Derivadas de orden superior ... 242
14.7 Diferenciales ... 244
Ejercicios resueltos ... 246
Ejercicios propuestos ... 252

15. APLICACIONES DE LAS DERIVADAS ... 257
15.1 Monotonía de funciones ... 257
15.2 Concavidad ... 260
15.3 Trazados de curvas ... 263
a. Si la curva tiene puntos de corte con los ejes ... 263
b. Si la curva tiene extremos relativos ... 263
c. Si la curva tiene puntos de inflexión ... 263
d. Si la curva es continua en todo su dominio ... 263
e. Si la curva presenta asíntotas ... 264
Ejercicios resueltos ... 265
Ejercicios propuestos ... 275

U N I D A D VI
***Cálculo Integral* ... 279**

16. LA INTEGRAL ... 281
16.1 La integral indefinida. Primer teorema fundamental del cálculo ... 281
16.1.1 Definición ... 281
16.1.2 Cálculo de la primitiva de una función ... 281
a. Integrales de funciones polinómicas ... 281
b. Integrales de funciones exponenciales ... 282
16.2 La integral definida. Segundo teorema fundamental del cálculo ... 282
16.2.1 Definición ... 282
16.2.2 Cálculo del área bajo la curva ... 283
Ejercicios resueltos ... 285
Ejercicios propuestos ... 289

17. TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN ... 292
17.1 Integración por cambio de variable ... 292
17.2 Integración por partes ... 293
17.3 Integración por fracciones parciales ... 294
Aplicación del método ... 294
17.4 Fórmulas básicas ... 296
17.4.1 Fórmula $\int u^2 dx$ ... 296
17.4.2 Forma $\int u^{-1} dx$ ... 297
17.4.3 Forma $\int e^u dx$ ... 297
17.4.4 Forma $\int ln(u) dx$ ... 298
17.5 Integrales trigonométicas ... 299
Ejercicios resueltos ... 300
Ejercicios propuestos ... 308

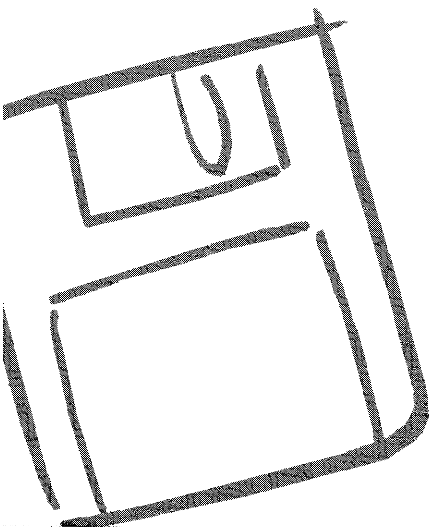
U N I D A D VII
***Introducción a la Geometría Analítica* ... 313**

18. PUNTOS EN EL PLANO ... 315
18.1 Representación de un punto ... 315
18.2 Distancia entre dos puntos ... 316
18.3 Punto medio de un segmento ... 317
18.4 División proporcional de un segmento ... 318
Ejercicios resueltos ... 320
Ejercicios propuestos ... 325

19. RECTAS EN EL PLANO ... 326
19.1 Pendiente de una recta ... 326
19.2 Ecuaciones de la recta ... 328

19.2.1 Ecuación punto-pendiente 328
19.2.2 Ecuación general 329
19.3 Ángulo de intersección de dos rectas........ 330
19.4 Distancia de un punto a una recta 331
Ejercicios resueltos.. 333
Ejercicios propuestos.. 339

20. CÓNICAS EN EL PLANO 344
20.1 Circunferencia.. 344
20.1.1 Elementos de la circunferencia..... 344
20.1.2 Ecuación de la circunferencia 344
a. Ecuación canónica................ 344
b. Ecuación general.................... 345
c. Obtención de la ecuación canónica a partir de la ecuación general..................... 345
20.2 Parábolas.. 347
20.2.1 Elementos de la parábola........... 347
20.2.2 Ecuación de la parábola 347
a. Ecuación canónica................ 347
b. Ecuación general.................... 348
c. Obtención de la ecuación canónica a partir de la ecuación general..................... 349
20.3 Elipses 350
20.3.1 Elementos de la elipse 351
20.3.2 Ecuación de la elipse 351
a. Ecuación canónica................ 351
b. Ecuación general.................... 352
c. Obtención de la ecuación canónica a partir de la ecuación general..................... 353
20.4 Hipérbolas 355
20.4.1 Elementos de la hipérbola 356
20.4.2 Ecuación de la hipérbola............ 356
a. Ecuación canónica................ 356
b. Ecuación general.................... 357
c. Obtención de la ecuación canónica a partir de la ecuación general..................... 358
Ejercicios resueltos.. 360
Ejercicios propuestos.. 367



U N I D A D VIII
Matrices **.. 373**

21. MATRICES.. 375
21.1 Definición.. 375
21.2 Igualdad de matrices (matrices equivalentes) 375
21.3 Matrices especiales 376
21.3.1 Matriz cuadrada........................... 376
21.3.2 Matriz diagonal............................ 377
21.3.3 Matriz identidad 377
21.3.4 Matriz triangular.......................... 377
a. Matriz triangular superior..... 377
b. Matriz triangular inferior 378
21.3.5 Matriz nula 378
21.3.6 Matriz transpuesta....................... 378
21.3.7 Matriz simétrica........................... 379
21.4 Operaciones con matrices............................ 379
21.4.1 Suma de matrices 379
21.4.2 Producto de un escalar por una matriz...................................... 380
21.4.3 Producto de dos matrices 380
Ejercicios resueltos.. 382
Ejercicios propuestos.. 386

22. DETERMINANTES... 390
22.1 Definición.. 390
22.2 Cálculo del determinante 390
22.2.1 Determinante de una matriz de segundo grado 390
22.2.2 Menor de un elemento de una matriz...................................... 390
22.2.3 Determinante de una matriz de una matriz de tercer grado (método de Sarros) 391
22.2.4 Determinante por el método de cofactores 392
a. Matriz de cofactores 392
b. Obtención del determinante por el método de cofactores... 392
22.3 Adjunta de una matriz 393
22.4 Matriz inversa.. 394
22.4.1 Definición..................................... 394
22.4.2 Cálculo de la matriz inversa........ 394
22.5 Transformaciones elementales 396
22.5.1 Definición..................................... 396
22.5.2 Cálculo de la matriz inversa........ 396
Ejercicios resueltos.. 398
Ejercicios propuestos.. 403

23. SISTEMAS DE ECUACIONES....................... 405
23.1 Regla de Cramer 405
23.2 Método de Gauss-Jordan 407
Ejercicios resueltos.. 409
Ejercicios propuestos.. 413

BIBLIOGRAFÍA.. 416

INTRODUCCIÓN

El libro *Matemáticas Básicas* ha sido escrito pensando en los alumnos que desean aprender esta ciencia de una manera autodidacta, o bien que necesitan reforzar algunos temas que no fueron profundizados en su momento. Atendiendo a ello, esta publicación ha sido elaborada siguiendo las exigencias y los requerimientos de los planes curriculares que pertenecen a la mayoría de carreras profesionales ofertadas en las principales universidades del país.

El objetivo de este libro es que los alumnos puedan aprender los temas propuestos de un modo directo, sin tener que consultar continuamente a un profesor. Vale aclarar que esta publicación no intenta suplir al docente, sino más bien ser una herramienta de ayuda eficiente en aquellos casos en los que el estudiante, por alguna razón (como sucede en el caso de la educación a distancia), no pueda contar con el apoyo constante del profesor. En cada una de las unidades y capítulos, la teoría ha sido explicada detalladamente para guiar al alumno paso a paso en la comprensión de los temas. Por ello, no hay duda de que la presente publicación será también de gran ayuda para aquellos estudiantes que asistan a los cursos presenciales.

El orden en el que aparecen los contenidos obedece estrictamente al objetivo mencionado líneas arriba. La idea central es que los lectores encuentren en este libro los conocimientos previos y necesarios para comprender cada punto que se exige dominar. Por ello, se ha incluido una primera unidad de repaso, donde se explican conceptos básicos de la teoría de los números, de la aritmética y del álgebra. Asimismo, las unidades siguientes se han organizado de manera tal que el lector pueda ir adquiriendo los conocimientos necesarios progresivamente, es decir, que avance en el estudio de este libro tras haber alcanzado un conocimiento satisfactorio de los temas anteriores. Esto es importante debido a que muchas veces los alumnos descuidan la disciplina secuencial del aprendizaje, lo cual no es en absoluto recomendable para el estudio de este libro. Por ello, si existiera alguna dificultad para comprender un tema específico, se recomienda revisar, de manera cuidadosa, los principales puntos vistos en las páginas anteriores. Así, por ejemplo, los temas de funciones, límites, derivadas e integrales están concatenados. Ninguno de ellos puede comprenderse sin tener primero un buen dominio de los temas ya antes vistos. Para facilitar esta tarea, el libro incluye numerosas notas al margen del cuerpo del texto, en las que se recuerda constantemente cuáles contenidos deben manejarse para comprender el tema motivo de estudio.

El libro *Matemáticas Básicas* está dividido en ocho unidades. La primera, como ya se ha mencionado, es la de *conceptos elementales*. La segunda unidad comprende *lógica* y *teoría de conjuntos*. En ella empezamos con una introducción a la lógica proposicional y a la cuantificacional. La tercera unidad es la de los *números reales*. En ella se analiza en profundidad la definición d número real, y se estudia el tema de las ecuaciones e inecuaciones. Aquí s introducen algunas novedades respecto de lo que se suele estudiar en e nivel secundario, como por ejemplo las operaciones con valor absoluto y l importancia de identificar correctamente el conjunto solución.

La cuarta unidad es la de *funciones*, donde hacemos hincapié en los temas que se van a relacionar más adelante con el cálculo diferencial, con el fin de resaltar la relación mencionada entre funciones, límites, derivadas e integrales.

En la quinta unidad se estudia el *cálculo diferencial* y se comienza con un capítulo introductorio de límites. Luego, se desarrolla el concepto de derivada en función del concepto de límite, y los métodos algebraicos para derivar los diferentes tipos de funciones. Finalmente, estudiamos algunas aplicaciones prácticas del cálculo diferencial.

En la sexta unidad vemos el *cálculo integral*. Para ello comenzamos definiendo la integral como la antiderivada o primitiva de una función, y como el área bajo una curva. Evidentemente, en el primer caso veremos la integral indefinida, y en el segundo la integral definida. En un segundo capítulo veremos las diferentes técnicas de integración.

La séptima unidad es una introducción a la *geometría analítica*. Aquí se estudian el plano de coordenadas, la recta y las principales figuras cónicas, es decir, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola. En el caso de las rectas, se hace una pequeña introducción al margen del texto sobre el uso de la recta tangente.

La octava unidad corresponde a las *matrices*. Si bien, aparentemente, este tema no tiene una relación directa con los anteriores, el alumno verificará su relación si estudia alguna vez cálculo avanzado. No obstante, las matrices sí se relacionan con la tercera unidad, pues mediante ellas es posible resolver sistemas de ecuaciones de varias variables.

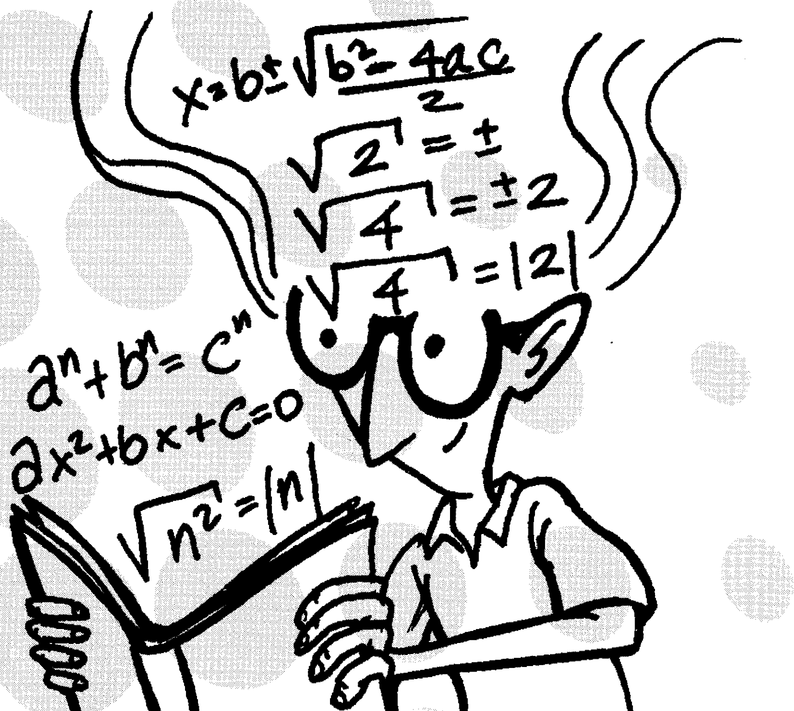
Cada una de las ocho unidades mencionadas se desarrolla en dos o tres capítulos. Estos capítulos constan de una explicación teórica con ejemplos, una gran cantidad de ejercicios resueltos y ejercicios propuestos. Se recomienda resolver concienzudamente los ejercicios de los ejemplos y los ejercicios resueltos, para luego comparar los procedimientos que se utilizaron en la resolución personal de los mismos con los pasos que se proponen en el libro, y así estar en condiciones de comprender las unidades subsiguientes. De esta manera, la comprensión y el aprendizaje del tema serán más sólidos. Para mayor referencia, en nuestra bibliografía hemos señalado las fuentes que utilizamos en la elaboración del presente libro. También se indican algunas páginas web que podrán servir de consulta adicional.

Finalmente, quisiéramos manifestar nuestro agradecimiento a Roy Espinal y a Diego Espinal, quienes han colaborado en el planteamiento y el desarrollo de los ejercicios, y a la Editora Lealtad, por la confianza y la oportunidad brindada para realizar este trabajo.

El autor

UNIDAD I

Conceptos Elementales



Capítulo 1
CONJUNTOS DE NÚMEROS

Los números se agrupan en diferentes conjuntos. Debido a que existen muchas y diferentes definiciones de lo que es un conjunto, nos limitaremos a dar una definición funcional y algunos ejemplos. Para nosotros, un conjunto será simplemente una colección de elementos.

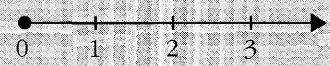
1.1 Números naturales

Los números naturales son aquellos que nos sirven para contar y para ordenar. Los matemáticos discuten respecto de si el cero pertenece o no al conjunto de los números naturales. En este libro, vamos a considerar que sí pertenece a dicho conjunto; por lo tanto, el conjunto de los naturales será:

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5...\}$$

Como se puede apreciar, los números naturales tienen un principio, pero no tienen fin.

Los números naturales se pueden ubicar en una semirrecta.



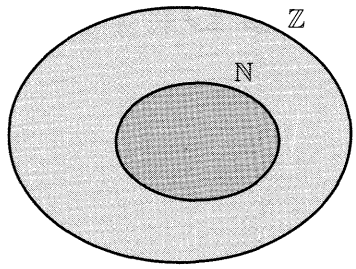
1.2 Números enteros

El conjunto de los números enteros es más amplio que el de los números naturales, pues incluye también a los números negativos, es decir, a los *inversos aditivos*. El conjunto de los números enteros es:

$$\mathbb{Z} = \{... -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 3; 4; 5...\}$$

Como se puede apreciar, los números enteros no tienen principio ni fin. Además, el conjunto de los números naturales está incluido en el conjunto de los números enteros.

De acuerdo con ello, tenemos el siguiente diagrama:



Recuerde:

Signos iguales → sumar → colocar el mismo signo.

Signos diferentes → restar → colocar signo del mayor.

1.2.1 Suma

En los números enteros, la resta forma parte de la suma. Cuando los números tienen signos iguales, sus valores absolutos se suman y se coloca el mismo signo.

Ejemplos:

1. $-3 - 5 = -8$
2. $17 + 23 = 40$
3. $-12 - 9 = -21$

Cuando los números tienen signos diferentes, sus valores absolutos se restan y se coloca el signo del número que tiene mayor valor absoluto.

En el conjunto de los números enteros, la resta es un caso especial de la suma; por ello, no es necesario estudiarla aparte.

Ejemplos:

1. $-4 + 12 = 8$
2. $14 - 23 = -9$
3. $-34 + 14 = -20$

1.2.2 Multiplicación

En la división, respecto de la ley de signo, se procede igual que en la multiplicación. Cuando los números tienen signos iguales, el producto (o el cociente) siempre será positivo.

Recuerde:

$+ \bullet + = +$

$- \bullet + = -$

$- \bullet - = +$

La ley de los signos es la misma para la multiplicación y para la división.

Ejemplos:

1. $(-4)\,(-12) = 48$
2. $(15)\,(20) = 300$
3. $(-24) \div (-6) = 4$

Cuando los números tienen signos diferentes, el producto (o el cociente) siempre será negativo.

Ejemplos:

1. $(-15)\ (4) = -60$
2. $(12)\ (-7) = -84$
3. $(35) \div (-5) = -7$

1.3 Números racionales

Los números racionales son todos aquellos que pueden expresarse como la división de dos números enteros, es decir, son los números que pueden expresarse como una fracción.

Al dividendo de la fracción se le llama numerador, y al divisor se le llama denominador.

$$\frac{\text{Numerador}}{\text{Denominador}}$$

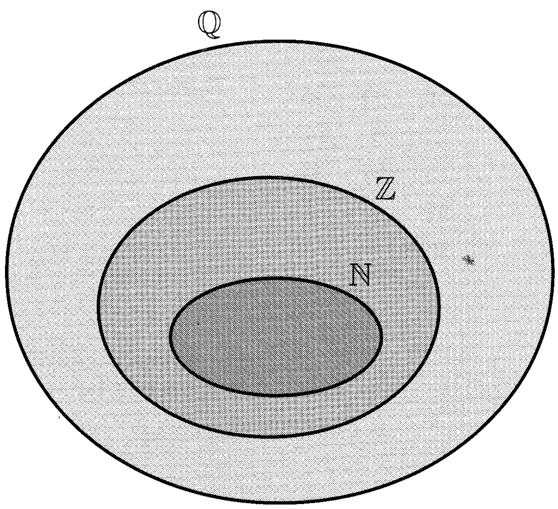
Dentro del conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$), está incluido el conjunto de los números enteros (y por lo tanto, el de los naturales), pues todo número entero puede ser expresado como una fracción.

Ejemplos:

1. $-5 = \frac{-5}{1}$

2. $15 = \frac{15}{1}$

De acuerdo con lo anterior, tenemos el siguiente diagrama:



Corolarios:

- Todo número natural es entero, pero no todo número entero es natural.
- Todo número entero es racional, pero no todo número racional es entero.

1.3.1 Fracciones equivalentes

Son aquellas fracciones que, aunque se expresan de manera diferente, poseen el mismo valor.

Si los términos de una fracción dada se multiplican o dividen por un mismo número, se obtendrá una fracción equivalente.

Ejemplos:

1. $\frac{3}{5}=\frac{3\,.\,8}{5\,.\,8}=\frac{24}{40}$

2. $\frac{27}{36}=\frac{27\ \div\ 9}{36\ \div\ 9}=\frac{3}{4}$

1.3.2 Operaciones con fracciones

a. Suma

Este tema es fundamental para el estudio de toda la matemática.

No avance hasta que no lo tenga claro.

Para sumar dos fracciones, debemos asegurarnos de que ambas posean el mismo denominador. Para ello, debemos remplazar las fracciones por fracciones equivalentes.

Ejemplos:

1. $$\frac{5}{6}+\frac{1}{4}=\frac{\quad}{12}+\frac{\quad}{12}$$
$$=\frac{10}{12}+\frac{3}{12}$$
$$=\frac{13}{12}$$

El denominador será un múltiplo común a ambos denominadores.

El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de 6 y 4 es 12.

El m.c.m. se divide por cada denominador y se multiplica por el numerador.

2. $$2+\frac{1}{12}-\frac{11}{9}=\frac{\quad}{36}+\frac{\quad}{36}-\frac{\quad}{36}$$
$$=\frac{72}{36}+\frac{3}{36}-\frac{44}{36}$$
$$=\frac{31}{36}$$

El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de 12 y 9 es 36.

Para sumar fracciones, debe homogeneizar los denominadores.

3. $$1{,}5+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=$$
$$\frac{15}{10}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=$$

Primero, convertimos todo a fracciones.

$$\frac{15}{10}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}=\frac{}{20}+\frac{}{20}+\frac{}{20}$$

$$\frac{30}{20}+\frac{10}{20}-\frac{15}{20}=\frac{25}{20}=\frac{5}{4}$$

El mínimo común múltiplo de 10, 2 y 4 es 20. Luego, sumamos las fracciones homogéneas.

Nota: las fracciones pueden estar acompañadas por un entero. En ese caso, se les llama números mixtos. Ambas partes, la entera y la fraccionaria, se pueden sumar siguiendo el mismo procedimiento de la suma de fracciones.

Ejemplo:

1. $$3\frac{5}{6}=\frac{18}{6}+\frac{5}{6}=\frac{23}{6}$$

Para hacerlo más rápido, podemos simplemente multiplicar el denominador por el entero y al resultado, le sumamos el numerador. Este nuevo resultado será el nuevo numerador y el denominador seguirá siendo el mismo.

$$3\frac{5}{6}=\frac{3\bullet 6+5}{6}=\frac{23}{6}$$

b. Multiplicación

Para multiplicar fracciones, primero debemos simplificar cualquier numerador con cualquier denominador. Luego, debemos multiplicar los numeradores y los denominadores resultantes.

Ejemplos:

1. $$\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{9}{11}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{3}{11}\right)$$
$$=\frac{15}{22}$$

Simplificamos y luego multiplicamos.

2. $$(14)\left(2\frac{1}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\right)=$$
$$\left(\frac{14}{1}\right)\left(\frac{9}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\right)=$$
$$\left(\frac{7}{1}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{1}\right)=$$
$$=\frac{105}{4}$$

Transformamos los números mixtos a fracciones.

Simplificamos y luego multiplicamos.

Antes de multiplicar, recuerde que puede simplificar un numerador con un denominador.

3. $\left(\frac{10}{11}\right)\left(\frac{11}{12}\right)+\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{13}{14}\right)=$ Simplificamos lo que sea posible.

$$\frac{10}{12}+\frac{12}{14}$$

$$\frac{5}{6}+\frac{6}{7}=\frac{35}{42}+\frac{36}{42}=\frac{71}{42}$$

c. División

La división de fracciones se puede expresar de dos maneras distintas:

1.ª Usando el símbolo ÷ : $\frac{5}{6}\div\frac{3}{4}$.

2.ª Colocando una fracción sobre otra: $\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}}$

La división entre dos fracciones se puede convertir en multiplicación si se invierten los términos la segunda fracción.

Ejemplos:

1. $\frac{5}{6}\div\frac{3}{4}=\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=$ Invertimos la segunda fracción.

$=\left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$ Simplificamos y multiplicamos.

$=\frac{10}{9}$

2. $\frac{4}{7}\div 2=\left(\frac{4}{7}\right)\div\left(\frac{2}{1}\right)=$ Primero, expresamos en fracciones.

$\frac{4}{7}\bullet\frac{1}{2}=\frac{4}{14}=\frac{2}{7}$ Luego, invertimos la segunda fracción. Después, multiplicamos y simplificamos.

1.3.3 Decimales

Los números racionales se pueden expresar como decimales exactos o como decimales periódicos. Los decimales no periódicos (aquellos que no se repiten siguiendo una regla), que no son exactos, no son números racionales y, por lo tanto, no provienen de una fracción.

Ejemplos:

DECIMALES EXACTOS	DECIMALES INEXACTOS	
Decimales con coma	Periódicos	No periódicos
0,24 32,8 0,25	2,5555... $= 2,\widehat{5}$ 0,4565656... $= 0,4\widehat{56}$ 25,02111... $= 25,02\widehat{1}$	3,23417... 27,2386... 0,3412...
NÚMEROS RACIONALES		NÚMEROS IRRACIONALES

Observe que en el caso de los decimales inexactos periódicos, es posible predecir cuál número será el que continúe la serie. Mientras en el caso de los decimales inexactos no periódicos, no es posible predecir el número que continuará la serie.

1.3.4 Transformación de decimales a fracciones

a. Decimales exactos

Para convertir en fracción un número expresado en decimales exactos, es necesario:

1. Copiar el número sin la coma decimal.
2. Dividirlo entre un número formado por un 1, seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga el número original.

Ejemplos:

1. $2,45 = \dfrac{245}{100}$; simplificando, quedaría $= \dfrac{49}{20}$

2. $0,2 = \dfrac{2}{10}$; simplificando, quedaría $= \dfrac{1}{5}$.

3. $1,0003 = \dfrac{10\ 003}{10\ 000}$

b. Decimales inexactos periódicos

Para convertir en fracción a los decimales inexactos periódicos, es necesario:

1. Copiar el número sin la coma decimal.
2. Restarle a este número toda la parte no periódica (también sin la coma decimal).

3. Dividir el resultado entre un número formado por tantos 9 como cifras decimales periódicas tenga el número original, seguido de tantos ceros como cifras decimales no periódicas tenga el número original.

Intente encontrar la demostración de este procedimiento.

Pruebe agregándole al número lo necesario para ser entero. Luego, encuentre la relación.

Ejemplos:

1. $2,\overset{\frown}{35} = \frac{235-2}{99} = \frac{233}{99}$

2. $4,2\overset{\frown}{6} = \frac{426-42}{90} = \frac{384}{90}$; simplificando quedaría $= \frac{64}{15}$.

3. $0,2\overset{\frown}{48} = \frac{248-2}{990} = \frac{246}{990}$; simplificando quedaría $= \frac{41}{165}$.

Ejercicios resueltos

1. -18 + 20 - 19 =

Solución:

-18 + 20 - 19

+2 - 19 = -17

2. Al hacer el balance en una empresa, el registro de ingresos y egresos durante el primer tercio del año fue el siguiente:
Ingresos ($): 500, 859, 525, 865.
Egresos ($): 300, 1 200, 563, 1 980.
De lo antes expuesto, ¿la empresa tiene ganancias o pérdidas?

Solución:

Agrupamos los ingresos:

La suma de ingresos será 500 + 859 + 525 + 865 = 2 749.

Ahora, agrupamos los egresos.

La suma de egresos será 300 + 1 200 + 563 + 1 980 = 4 043.

Considerando los ingresos como números positivos y los egresos como negativos, tenemos +2 749 y -4 043.

La suma 2 749 - 4 043 = -1 294; por lo tanto, se concluye que la empresa tiene pérdidas.

3. $450 + 451 - 123 - 895=$

Solución:

Se aconseja tomar números de dos en dos, y luego efectuar operaciones con dichos pares:

$450 + 451 = 901; -123 - 895 = -1\,018$
$901 - 1\,018 = -117$

4. $(-8)\ (3) + (-2)\ (-6) =$

Solución:

Operamos primero las multiplicaciones:
$(-8)\ (3) = -24$ y $(-2)\ (-6) = 12$ según la ley de signos expuesta anteriormente.

Luego, sumamos los resultados:
$-24 + 12 = -12$

Recuerde la jerarquía de las operaciones:

Primero, resuelva las potencias; luego, las multiplicaciones y, finalmente, las sumas.

5. $(225) : (15)\ (6) + (-81) : (9)\ (12)$

Solución:

Resolvemos primero las multiplicaciones y las divisiones:
$(225) : (15)\ (6) = 90$ y luego, también $(-81 : 9)\ (12) = -108$.

Con los resultados anteriores, efectuamos la operación central:
$90 + (-108) = -18$.

6. $1,\widehat{5} + 2,\widehat{09} - \dfrac{4}{11}$

Solución:

$$\frac{15-5}{9} + \frac{209-2}{99} - \frac{4}{11}$$

Llevamos todo a fracciones.

$$\frac{10}{9} + \frac{207}{99} - \frac{4}{11} = \frac{\quad}{99} + \frac{\quad}{99} - \frac{\quad}{99}$$

Homogeneizamos (por medio del m.c.m.).

$$\frac{110}{99} + \frac{207}{99} - \frac{36}{99} = \frac{110+207-36}{99}$$

Operamos las fracciones equivalentes.

$$= \frac{281}{99}$$

Calculamos la fracción final.
No se puede simplificar porque la fracción es irreductible.

7. $\left(51 + \dfrac{3}{9}\right) - \left(\dfrac{5}{4} - 0,2\right) =$

Solución:

$$\frac{5}{4}-0,2 \Rightarrow \frac{5}{4}-\frac{2}{10} \Rightarrow$$

$$\frac{25}{20}-\frac{4}{20}=\frac{21}{20}$$

Resolvemos lo que está en el paréntesis.

$$51+\frac{3}{9}-\frac{21}{20} \Rightarrow 51+\frac{1}{3}-\frac{21}{20}$$

$$\frac{51 \bullet 60}{60}+\frac{20}{60}-\frac{21}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{3\ 060}{60}+\frac{20}{30}-\frac{63}{60}=\frac{3\ 017}{60}$$

Ahora, homogeneizamos (*fracciones equivalentes*).

8. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) \bullet 10-0,5\widehat{3}=$

Solución:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=$$

Homogeneizamos (m.c.m.).

$$\frac{30}{60}+\frac{20}{60}+\frac{15}{60}+\frac{12}{60}=\frac{77}{60}$$

$$\frac{77}{60} \bullet 10-0,5\widehat{3}$$

Luego, simplificamos y convertimos a fracción $0,5\widehat{3}$.

$$\frac{77}{6} - \frac{53-5}{90} \Rightarrow \frac{77}{6}-\frac{48}{90}$$

$$\frac{1\ 155}{90}-\frac{48}{90} \Rightarrow \frac{1\ 107}{90}=$$

Homogeneizamos.

$$\frac{123}{10}=12,3$$

9. $(-5 \bullet -3)-\left(-\frac{3}{4}\right)+\frac{-0,8}{-2}=$

Solución:

$$(5 \bullet 3)+\left(\frac{3}{4}\right)+\frac{0,8}{2}$$

Eliminamos los signos.

$$15+\frac{3}{4}+\frac{\frac{8}{10}}{\frac{2}{1}} \Rightarrow$$

Ahora, convertimos 0,8 en fracción.

$$15+\frac{3}{4}+\frac{8}{10} \bullet \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$15+\frac{3}{4}+\frac{4}{10}$$

$$\frac{15 \bullet 20}{20}+\frac{15}{20}+\frac{8}{20}=\frac{323}{20}$$

Homogeneizamos los denominadores.

Ejercicios propuestos

1. $-4578 + 112 - 4523 + 7856 =$
   R. -1133

2. $-180 + 200 - 199 - 123 =$
   R. -302

3. $4587 + 45\,879 - 78\,963 - 412 =$
   R. $-28\,909$

4. $11\,111 + 22\,222 - 55\,555 - 789\,654 - 785\,478 + 23\,556 - 5654 =$
   R. $-1\,579\,452$

5. $10\,(14 + 2\,(12))\,(2)\,(3)\,(4) : (60) =$
   R. 152

6. $14\,((11 \bullet 12) + (10 \bullet -9)) : ((2)\,(5 \bullet 4 + 1)) =$
   R. 14

7. $((((((3 \bullet 10 + 1) \bullet 2 + 1) \bullet 2 + 1) \bullet 2 + 1) \bullet 2 + 2) : 2) =$
   R. 256

Recuerde resolver primero lo que se encuentra dentro de paréntesis.

8. $\left(\frac{1}{3} \bullet \frac{2}{5}\right) - (3{,}2)\left(\frac{1}{4} \bullet \frac{4}{8}\right) =$
   R. $\frac{-4}{15}$

9. $\frac{3}{7} : \frac{5}{14} \bullet \frac{1}{2} + 0{,}32$
   R. $\frac{23}{25}$

10. $\frac{3}{5}\left(\frac{2}{4} + 8\right) : (2 + 1{,}\widehat{3})$
    R. $\frac{153}{100}$

11. Simplificar : $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{4}} + \dfrac{\frac{7}{4}}{\frac{14}{8}} + \dfrac{3 + 2\frac{1}{2}}{4} =$
    R. $\frac{349}{120}$

12. Simplificar : $2,1\widehat{3}-4,\widehat{3}+5,\widehat{8}=$

R. $\dfrac{166}{45}$

13. A un administrador se le destina cierto dinero para invertir en la bolsa de valores. Si invierte S/. 135 000 y le quedan 17/20 del dinero asignado, ¿cuánto dinero se le asignó?

R. S/. 900 000

14. Un empresario reflexiona: "asigné los 3/7 de mi capital en pagar los sueldos a mis empleados, luego invertí la mitad de lo que me quedaba en maquinaria, y ahora sólo me quedan S/. 130 000". ¿Cuánto era el capital inicial del empresario?

R. S/. 455 000

15. Los 3/4 de los accionistas de una empresa exportadora están ausentes, y los 2/3 de los presentes abandonan la reunión. Si los accionistas que permanecen en la reunión son cuatro, determine la cantidad de accionistas.

R. 48 personas

16. Un gerente de la bolsa empieza a invertir y en su primera oportunidad pierde un tercio de su dinero, en la segunda pierde los 3/5 de lo que le queda y en la tercera pierde los 4/7 del resto. ¿Qué cantidad de soles le ha quedado, si se sabe que ha perdido S/. 62 000?

R. 8000

17. El gerente de una compañía vende los 2/7 del total de acciones que tiene, más 4 4/7 acciones. De esta manera, le quedan los 2/3 de las que tenía inicialmente. ¿Cuántas acciones le quedan al dueño de la compañía?

R. 64

18. Una empresa administra su producción de acuerdo con la calidad del producto. Así, se tiene que los 3/4 de la producción más 7 toneladas son destinadas a la exportación, y 1/3 menos de 20 toneladas son destinadas al comercio local. ¿Qué cantidad de toneladas fue destinada a la exportación?

R. 124

Capítulo 2
ARITMÉTICA: RAZONES Y PROPORCIONES

2.1 Razón

Es la relación entre dos cantidades. Se llama razón aritmética a la diferencia de dos cantidades, y razón geométrica al cociente entre dos cantidades.

La razón aritmética es una resta, mientras la razón geométrica es una división.

- Razón aritmética: $a - b$.
- Razón geométrica: $\frac{a}{b}$.

2.2 Proporción

Es la comparación entre dos razones iguales.

Proporción aritmética: $a - b = c - d$.

Proporción geométrica: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

En la proporción aritmética:
a y d son términos extremos.
b y c son términos medios.

En la proporción geométrica:
a y c son los antecedentes.
b y d son los consecuentes.

2.2.1 Proporción discreta

Es aquella en la que todos sus términos son diferentes.

Proporción aritmética discreta: $5 - 3 = 20 - 18$.

Proporción geométrica discreta: $\frac{3}{5} = \frac{24}{40}$.

(Recuerde lo que vimos en el apartado *fracciones equivalentes*).

2.2.2 Proporción continua

Es aquella en la que sus términos medios son iguales.

Proporción aritmética continua: 29 - 21 = 21 - 13.

Proporción geométrica continua: $\frac{2}{8}=\frac{8}{32}$.

2.3 Media proporcional

Es el término medio de una proporción continua.

2.3.1 Media aritmética

Es la mitad de la suma de los términos extremos.

$a - x = x - b$

$x = \frac{a+b}{2}$

Ejemplos:

1. La media aritmética de 300 y 150 es:

$\text{M.A.} = \frac{300+150}{2} = 225$

2. La media aritmética (M.A.) de 26 y 25 es:

$\text{M.A.} = \frac{26+25}{2} = 25{,}5$

2.3.2 Media geométrica

Es la raíz cuadrada del producto de sus términos extremos.

$\frac{a}{x}=\frac{x}{b} \rightarrow x = \sqrt{ab}$

Ejemplos:

1. La media geométrica (M.G.) de 225 y 100 es:

$\text{M.G.} = \sqrt{100 \bullet 225} = 150$

2. La media geométrica (M.G.) de 16 y 36 es:

$$M.G. = \sqrt{16 \cdot 36} = 24$$

2.3.3 Media armónica

Es la inversa de la media aritmética de las inversas de dichos números. Se presenta con H.

$$H = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{b+a}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}$$

Ejemplos:

1. La media armónica (H) de 10 y 5 es:

$$H = \frac{2 \cdot 10 \cdot 5}{10+5} = \frac{20}{3} = 6,\widehat{6}$$

2. La media armónica (H) de 14 y 16 es:

$$H = \frac{2 \cdot 16 \cdot 14}{16+14} = \frac{16 \cdot 14}{15} = 14,9\widehat{3}$$

2.4 Proporcionalidad

El tema de proporcionalidad normalmente se trabaja a través del método de la regla de tres. Nosotros, aquí, vamos a resolver los problemas de proporcionalidad partiendo de la definición de proporción. Primero, veamos unas definiciones preliminares.

2.4.1 Magnitudes proporcionales

Una magnitud es todo aquello que se puede medir. Las relaciones entre dos magnitudes son de dos tipos: directamente proporcionales o inversamente proporcionales.

Recuerde la regla de tres directa:

$$a \to b$$
$$c \to x$$
$$x = \frac{bc}{a}$$

Y la regla de tres inversa:

$$a \to b$$
$$c \to x$$
$$x = \frac{ab}{c}$$

a. Magnitudes directamente proporcionales (DP)

Si al analizar dos magnitudes relacionadas entre sí observamos que cuando una de ellas aumenta, la otra también aumenta; y que cuando una de ellas disminuye, la otra también lo hace, entonces decimos que ambas magnitudes son directamente proporcionales y que el cociente (la división) entre ellas será siempre el mismo.

Magnitudes proporcionales:
Cuando una aumenta, la otra también aumenta.

⇑A ⇑B

Magnitudes inversamente proporcionales:
Cuando una aumenta, la otra disminuye.

⇑A ⇓B

Si A y B son directamente proporcionales, entonces

$\frac{a}{b} = k$

Donde k es una constante.

b. Magnitudes inversamente proporcionales (IP)

Si al analizar dos magnitudes relacionadas entre sí, observamos que cuando una de ellas aumenta, la otra disminuye; y que cuando una de ellas disminuye, la otra aumenta, entonces decimos que ambas magnitudes son inversamente proporcionales, y que el producto (la multiplicación) entre ellas será siempre el mismo.

Si A y B son inversamente proporcionales, entonces
$(a)\ (b) = k$
Donde k es una constante.

2.4.2 Reparto proporcional

a. Reparto directamente proporcional

Si tres cantidades A, B y C son directamente proporcionales a los números a, b y c, entonces se cumple que

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = k$$

De donde se obtiene que
$A = ak$
$B = bk$
$C = ck$

Si se reparte una cantidad X de manera proporcional a los números a, b y c, de tal manera que se obtienen las cantidades A, B y C respectivamente, entonces se cumple que

$A + B + C = X$, es decir,
$ak + bk + ck = X$

Resolviendo esta ecuación, podemos hallar k y así obtendremos A, B y C.

Piense en un auto que viaja a 10 km/h durante 2 horas. La distancia recorrida será 20 km.

- **Primer caso:**
  Tiempo constante: 2h.
  Si aumenta la velocidad, aumentará la distancia:
  ⇑v ⇑d (DP)
- **Segundo caso:**
  Distancia constante: 20 km.
  Si aumenta la velocidad, disminuirá el tiempo:
  ⇑v ⇓t (IP)

Ejemplos:

1. Repartir el número 81 000 en tres partes que sean directamente proporcionales a 20, 30 y 40. Dar como respuesta el número menor.

   Solución:

   Sean las cantidades A, B y C. Para el reparto proporcional directo se tiene que

   $\frac{A}{20} = \frac{B}{30} = \frac{C}{40} = k$

Despejando A, B y C en función de k:
$A = 20k$
$B = 30k$
$C = 40k$

La suma de A, B y C es 81 000
$\Rightarrow A + B + C = 81\ 000$

Reemplazando en función de k:
$20k + 30k + 40k = 81\ 000$

Despejando k:
$90k = 81\ 000$
$k = 900$
$\Rightarrow A = 18\ 000$
$B = 27\ 000$
$C = 36\ 000$

Por lo tanto, el número menor es $A = 18\ 000$

2. Un padre dejó una herencia de 540 000 soles para que fuese repartida en forma proporcional a las edades de sus 3 hijos, los cuales tienen 7, 9 y 11 años respectivamente. ¿Cuánto le tocaría al mayor?

Solución:

Sean las cantidades A, B y C. Para el reparto proporcional directo se tiene que

$$\frac{A}{7} = \frac{B}{9} = \frac{C}{11} = k$$

Repartir una cantidad A de manera proporcional a a, b y c:

$$A = ak + bk + ck.$$

Despejando A, B y C en función de k:
$A = 7k$
$B = 9k$
$C = 11k$

La suma de A, B y C es 540 000
$\Rightarrow A + B + C = 540\ 000$

Reemplazando las cantidades en función de k:
$7k + 9k + 11k = 540\ 000$

Despejando k:
$27k = 540\ 000$
$k = 20\ 000$
$\Rightarrow A = 140\ 000$
$B = 180\ 000$
$C = 220\ 000$

Por lo tanto, al mayor le tocaría $A = 220\ 000$

b. Reparto inversamente proporcional

Si tres cantidades A, B y C son inversamente proporcionales a los números a, b y c, entonces se cumple que

$$Aa = Bb = Cc = k,$$

de donde se obtiene que

$$A = \frac{k}{a}$$

$$B = \frac{k}{b}$$

$$C = \frac{k}{c}$$

Si se reparte una cantidad X de manera inversamente proporcional a los números a, b y c, de tal manera que se obtienen las cantidades A, B y C respectivamente, entonces se cumple que

$A + B + C = X$, es decir,

$$\frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c} = x$$

Resolviendo esta ecuación, podemos hallar k, y así obtendremos A, B y C.

Ejemplos:

1. El premio de una lotería debe repartirse en razón inversa a la cantidad de hijos de cada uno de los afortunados ganadores, los cuales tienen 2, 4, 5 y 10 hijos. Si la ganancia total es S/.210 000, ¿cuánto le corresponde a cada uno?

Solución:

Sean las cantidades A, B, C y D. Para el reparto proporcional inverso, se tiene que

$$A2 = B4 = C5 = D10 = k$$

Despejando A, B, C y D en función de k:
$A = k/2$
$B = k/4$
$C = k/5$
$D = k/10$

La suma de A, B, C y D es la ganancia total
$\Rightarrow A + B + C + D = 210\ 000$

Reemplazando en función de k:

$$\frac{k}{2} + \frac{k}{4} + \frac{k}{5} + \frac{k}{10} = 210\ 000$$

Despejando k, tenemos:

$$\frac{10k + 5k + 4k + 2k}{20} = 210\ 000$$

$21k = 20(210\ 000)$
$k = 200\ 000$
$\Rightarrow A = 100\ 000$
$B = 50\ 000$
$C = 40\ 000$
$D = 20\ 000$

Repartir una cantidad A de manera inversamente proporcional a a, b y c equivale a

$$A = \frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c}$$

2. Repartir 62 000 en partes inversamente proporcionales a los números 2, 3 y 5, y dar como respuesta el número mayor.

Solución:

Sean las cantidades A, B y C. Para el reparto proporcional inverso, $A2 = B3 = C5 = k$;

Despejando A, B y C en función de k:
$A = k/2$
$B = k/3$
$C = k/5$
La suma de A, B y C es 62 000
$\Rightarrow A + B + C = 62\ 000$
Reemplazando en función de k:

$$\frac{k}{2}+\frac{k}{3}+\frac{k}{5}=62\ 000$$

Despejando k:

$$\frac{15k+10k+6k}{30}=62\ 000$$

$31k = 30(62\ 000)$
$k = 60\ 000$
$\Rightarrow A = 30\ 000$
$B = 20\ 000$
$C = 12\ 000$
Por lo tanto, el número mayor es $A = 30\ 000$

2.4.3 Fórmulas de proporcionalidad

La relación entre una magnitud con otras se puede expresar en una fórmula de proporcionalidad. Esta consiste en igualar una fracción a una constante. En el numerador de la fracción, se coloca la magnitud de referencia multiplicada por todas las magnitudes que sean inversamente proporcionales a ella. En el denominador, se coloca el producto de las magnitudes directamente proporcionales.

Si A, B y C son directamente proporcionales a X, y D, E y F son inversamente proporcionales a X, entonces tendremos:

$$\frac{XDEF}{ABC} = k$$

En este tipo de ejercicios, se presenta una situación con dos casos, el inicial y el final. Aunque los valores de las magnitudes A, B, C, D, E y F varíen, la relación entre ellas permanecerá constante. A través de este método, podremos resolver ejercicios de regla de tres simple y compuesta.

$$\frac{X_1D_1E_1F_1}{A_1B_1C_1} = \frac{X_2D_2E_2F_2}{A_2B_2C_2}$$

A pesar de que el método de regla de tres compuesta es más común, aquí le proponemos un nuevo método, llamado *fórmulas de proporcionalidad.* Préstele atención. Se dará cuenta de que es fácil y práctico.

Ejemplos:

1. La magnitud A es DP a la magnitud B: cuando A vale 51, B vale 3. Hallar el valor que toma A cuando B vale 2.

   Solución:

   Dado que las magnitudes A y B son directamente proporcionales, tenemos que

   $$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = k \text{.................................} \quad \text{(I)}$$

   Entonces, como en nuestro primer caso, tenemos que $A_1 = 51$ y $B_1 = 3$, y que $B_2 = 2$, reemplazamos estos valores en (I):

   $$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = k \Rightarrow \frac{51}{3} = \frac{A_2}{2}$$

   Del primer miembro, tenemos $17 = \frac{A_2}{2}$

   $$17 \cdot 2 = A_2 = A_2 \Rightarrow 34 = A_2$$

2. Si un niño puede cavar un pozo en cinco horas y su amigo puede hacerlo en dos y media, ¿cuánto tiempo tardarán en cavar un pozo si trabajan juntos?

   Solución:

   Para poder comparar, necesitamos saber cuánto pueden cavar ambos niños en una misma cantidad de tiempo.
   El niño 1 cavará 1 pozo en 5 horas.
   El niño 2 cavará 1 pozo en 2,5 horas, es decir, cavará 2 pozos en 5 horas.
   Por lo tanto, los dos juntos cavarán 1 + 2 = 3 pozos en 5 horas.
   Si P representa la cantidad de pozos y T la cantidad de horas, vemos que P y T son directamente proporcionales (a más horas se podrá cavar más pozos).

   $$\frac{P}{T} = \text{Constante}$$

   Caso 1: $P = 3$, $T = 5$; Caso 2: $P = 1$, $T = ?$

   $$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

   $$\frac{3}{5} = \frac{1}{T_2}$$

   $$3T_2 = 5$$

   $T_2 = \frac{5}{3}$ horas, es decir, 1 hora y 40 minutos.

   Los dos niños juntos cavan un pozo en 1 hora y 40 minutos.

2.5 Porcentajes

Un porcentaje es un número expresado como una fracción cuyo denominador es 100.

A% es lo mismo que $\frac{A}{100}$.

Por ejemplo: $30\% = \frac{30}{100}$.

Así como una fracción representa un número, pero también una parte de algo, los porcentajes también representan una parte de algo.

Decir A% de B es lo mismo que decir $\frac{A}{100}$ de B, o sea,

$$\frac{A}{100} \cdot B = \frac{AB}{100}.$$

Por ejemplo, decir 30% de 70 es lo mismo que decir:

$\frac{30}{100}$ de 70, o sea, $\frac{30}{100} \cdot 70 = 21$.

Ejemplos:

Recuerde que un porcentaje se puede expresar como decimal o como fracción.

1. Calcule el 28 por ciento de 5000.

Solución:

$$28\% \cdot 5000 = \frac{28 \cdot 5000}{100} = 1400$$

2. ¿De qué número es 552 el 8% menos?

Solución:

Sea el número x, entonces

$$\frac{8}{100} \cdot x = 552$$

Homogeneizando divisores:

$$\frac{100}{100} \cdot x - \frac{8}{100} \cdot x = 552$$

$$\frac{92}{100} \cdot x = 552$$

$$x = \frac{552 \cdot 100}{92}$$

$$x = 600$$

3. Calcule el 75 por ciento del 40 por ciento de 7000.

Solución:

En este ejemplo, se presentan porcentajes sucesivos. Cuando se tiene este tipo de problemas, se procede a hacer los descuentos de manera continua.

$$\frac{75}{100} \cdot \frac{40}{100} \cdot 7000 = 2100$$

4. ¿De qué número es 168 el 14%?

Solución:

Sea el número x. Nos dicen que el 14% de x es 168, entonces

$$\frac{14}{100} \cdot x = 168$$

$$x = \frac{168 \cdot 100}{14}$$

$$x = 1200$$

Ejercicios resueltos

1. Se sabe que el promedio de notas de 45 alumnos es 11. Si por error de digitación se introduce un número más, nos percataremos de que el promedio aritmético aumentó en 14 unidades. ¿Cuál fue el número introducido por equivocación?

Solución:

Llamaremos y al número introducido por error para la primera parte del enunciado:

$$\text{M.A.}: \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{45}}{45} = 11 \text{.......................} (I)$$

Y lo que ocurre al incorporarse el número por error:

$$\text{M.A.}: \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{45} + y}{45+1} = 11 + 14 = 25 \text{..............} (II)$$

$$\text{De (I)} \quad \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{45}}{45} = 11 \qquad (\bullet 45)$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_{45} = 495 \text{.......................} (a)$$

$$\text{De (II)} \quad \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{45} + y}{45+1} = 25 \qquad (\bullet 46)$$

$$x_1 + x_2 + ... + x_{45} + y = 1150 \text{..................} (b)$$

Sustituyendo (a) en (b):

$$495 + y = 1150 \qquad (-495)$$

$$y = 655$$

Si quiere averiguar qué porcentaje es A de B, divida A entre B y multiplique el resultado por 100.

$$\frac{A}{B} \cdot 100\%$$

2. Se sabe que la media de 20 números es 14; además, se sabe que la media de otro conjunto de 30 números es 22. Determinar la media aritmética de todos los números.

Solución:

Situación inicial:

M.A. de 20 números $\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_{20}}{20} = 14$ ....(I)

M.A. de 30 números $\dfrac{y_1 + y_2 + ... + y_{30}}{30} = 22$ .... (II)

De (I) $\dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_{20}}{20} = 14$ (•20)

$x_1 + x_2 + ... + x_{45} = 280$ .... (a)

De (II) $\dfrac{y_1 + y_2 + ... + y_{30}}{30} = 22$ (•30)

$y_1 + y_2 + ... + y_{30} = 660$........................... (b)

La M.A. de todos los números será:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_{20} + y_1 + y_2 + ... + y_{30}}{20 + 30}$$

Reemplazando (a) y (b):

$$\frac{280 + 600}{20 + 30} = 18{,}8$$

3. Hallar la media aritmética de dos cantidades A y B.

$A = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 32$
$B = 2 + 4 + 6 + \dots + 40$

Solución:

La media aritmética del grupo $A + B$ será del modo siguiente:

$$\text{M.A.} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + ... + 32 + 2 + 4 + 6 + ...40}{n_A + n_B}$$

Donde n_A y n_B representan la cantidad de datos por cada grupo de números.
Determinando la cantidad de números de cada grupo y su respectiva suma, tenemos que para A: $n_A = 32$

$$S_A = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 32 \Rightarrow S_A = \frac{32.(32 + 1)}{2} = 528$$

Para B: factorizando el 2, dado que todos son pares, tenemos:
$B = 2 + 4 + 6 + ...$ $B = 2(1 + 2 + 3 + ... + 20)$
$n_B = 20$

La suma de $B = \dfrac{2 \cdot 20 \cdot (20 + 1)}{2} = 420.$

Por lo tanto, el promedio de los números será:

$$\text{M.A.} = \frac{528 + 420}{32 + 20} = \frac{948}{54} = 17{,}\widehat{5}$$

Para sumar los primeros números naturales, puede aplicar la siguiente fórmula:

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

4. El promedio de R y 10 es 15; el promedio de O y 15 es 10; y el promedio de R, 10, O, 35, Y y 15 es 20. Hallar el valor de $R + O + Y$.

Solución:

El promedio aritmético de R y 10 es:

$$\frac{R+10}{2}=15 \Rightarrow R+10=30 \qquad (-10)$$

R = 20

El promedio aritmético de O y 15 es:

$$\frac{O+15}{2}=10 \Rightarrow O+15=20 \qquad (-15)$$

O = 5

El promedio de R, 10, O, 35, Y, 15

$$\frac{R+10+O+35+y+15}{6}=20$$

Sustituyendo los valores obtenidos:

$$\frac{20+10+5+35+Y+15}{6}=20 \Rightarrow \frac{75+Y}{6}=20 \qquad (\bullet 6)$$

$$85 + Y = 120$$

$$Y = 35$$

Entonces, $R + O + Y = 60$

5. Calcular el promedio de los 100 primeros múltiplos positivos de 5.

Solución:

Los primeros 100 múltiplos de 5 son:

5 + 10 + 15 + 20 ... 500

Entonces, el promedio será:

$$\frac{5+10+15+20...500}{100} \Rightarrow \frac{5(1+2+3+...+100)}{100}$$

Por la fórmula de suma de números, tenemos que

$$\frac{5 \bullet \left(\frac{(100)(101)}{2}\right)}{100} = 5(101):2 = 252,5$$

6. Dos individuos A y B realizan un negocio, en el cual invierten S/. 5000 y S/. 6000, respectivamente. Se sabe que la ganancia que recibe cada individuo es proporcional a la cantidad que aportó. Una vez que se reparte la ganancia, si B le diera a A S/. 1000, ambos tendrían la misma cantidad. Hallar la ganancia.

Solución:

Sean las cantidades A y B, para el reparto proporcional directo se tiene que

$$\frac{A}{5000} = \frac{B}{6000} = k$$

Despejando A y B en funciones de k:
$A = 5000k$
$B = 6000k$

Una vez que se reparte la ganancia, si B le diera a A S/. 1000, ambos tendrían la misma cantidad.

$$B - 1000 = A + 1000$$
$$\Rightarrow 6000k - 1000 = 5000 + 1000$$
$$1000k = 2000 \qquad k = 2$$

$A = 10\,000$
$B = 12\,000$

La ganancia es la suma de A y B.
$\Rightarrow 10\,000 + 12\,000 = 22\,000$

7. Si la razón geométrica entre dos números es 4/5 y su diferencia es 6, hallar dichos números.

Solución:

Sean los números A y B, entonces la razón geométrica será:

$$\frac{A}{B} = \frac{4}{5}$$

Reacomodando la proporción:

$$\frac{A}{4} = \frac{B}{5} = k$$

Mediante el reparto proporcional, tenemos:

$A = 4k$ y $B = 5k$

Además, la diferencia de dichos números es 6.

$$A - B = 6$$
$$5k - 4k = 6$$
$$k = 6$$

Entonces
$A = 30$
$B = 24$

8. Repartir 56 158 en partes IP a los números: $\frac{2}{7}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}$ y $\frac{12}{15}$.

Sean las cantidades A, B, C y D. Para el reparto proporcional inverso se tiene que

$$A\left(\frac{2}{7}\right)=B\left(\frac{4}{5}\right)=C\left(\frac{6}{7}\right)=D\left(\frac{12}{15}\right)=k$$

Despejando A, B, C y D en función de k:

$A=\frac{7k}{2}$

$B=\frac{5k}{4}$

$C=\frac{7k}{6}$

$D=\frac{5k}{4}$

La suma de las cantidades debe ser igual a 56 158.

$$\frac{S_1}{C}=\frac{S}{C_2}$$

k= 7 836

Entonces
A = 27 426
B = 9795
C = 9142
D = 9795

9. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (

I. La longitud de una circunferencia es directamente proporcio al radio.
II. La superficie de una loseta y el número de losetas p embaldosar un patio son inversamente proporcionales.
III. La estatura o talla de una persona es directamente proporcio a su edad.

Solución:

I. (V) La longitud y el radio son directamente proporcionales mayor radio, mayor longitud de circunferencia.
II. (V) Si la longitud de cada loseta aumenta, necesitaren menos losetas para embaldosar (para cubrir) un patio.
III. (F) La estatura y la edad no están necesariamente relacionac puede darse el caso de que una persona de 16 años sea n grande que una de 18 años, o que una persona a los 80 aí mida menos que cuando tenía 25.

10. El consumo que un ingeniero realiza es directamente proporcio al sueldo. Este ingeniero que percibe un sueldo de \$560, aho \$70. Si recibe un aumento y consume \$910, ¿de cuánto fue aumento?

Solución:

Sea S sueldo y C consumo.
Como sabemos que el consumo es D.P. al sueldo, entonces

$$\frac{S_1}{C} = \frac{S}{C_2} = k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

Si ahorraba \$ 70, si quiere decir que su consumo fue de 560 - 70 = 490.

Sabemos, además, que el segundo consumo fue de 910.
Por lo tanto, reemplazando en (I), tenemos:

$\frac{560}{490} = \frac{S_2}{910} = k$ resolviendo para S_2

$$\Rightarrow \frac{560}{490} = \frac{S_2}{910}$$

Entonces $\Rightarrow S_2 = \frac{910 \bullet 560}{490} \Rightarrow S_2 = 1040$

Para averiguar en cuánto consistió el aumento, restaremos ambos sueldos:

$$1040 - 560 = 480$$

11. Ocho halcones de Harris cazan ocho ruiseñores en ocho minutos. ¿Qué tiempo será necesario para que 24 halcones cacen 24 ruiseñores?

La solución de este problema no es tan evidente. Fíjese bien antes de resolverlo.

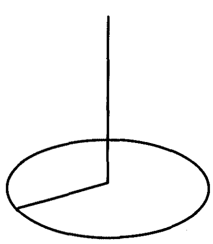
Solución:

Si 8 halcones cazan 8 ruiseñores en 8 minutos, cada halcón caza un solo ruiseñor en ese tiempo.
Entonces, si un halcón tarda 8 minutos en cazar un ruiseñor, 24 halcones cazarán 24 ruiseñores en 8 minutos.

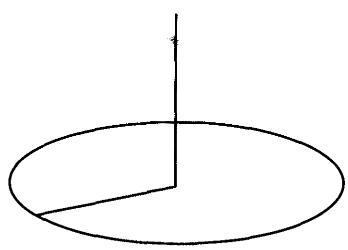
12. Se tiene una vaca amarrada a una soga de 10 m de longitud que demora 5 días en comer todo el pasto que hay alrededor de ella. ¿Cuánto tardaría si la cuerda fuese de 6 m?

Solución:

La longitud de la cuerda es directamente proporcional a la capacidad de alcance de pasto de la vaca.
Así tenemos que



Área inicial



Área final

En este ejercicio, debe tomar en cuenta que el tiempo que se demora en comer no depende del radio, sino del área del círculo.

El número de días es proporcional al área.

$$\frac{\pi r^2}{d} = k \Rightarrow \frac{\pi r_1^2}{d_1} = \frac{\pi r_2^2}{d_2}$$

Reemplazando los datos iniciales:

$R_1 = 3$ y $R_2 = 6$

$$\frac{\pi 3^2}{5} = k \Rightarrow \frac{\pi 6^2}{d_2}, \text{ entonces } \frac{9}{5} = \frac{36}{d_2}$$

$9d_2 = 180$ (:9)
$d_2 = 20$

13. Un boxeador da tres golpes por segundo. ¿Cuántos dará en un minuto golpeando al doble de frecuencia?

Solución:

	Caso 1	Caso 2
Golpes (g)	3	x
Tiempo (t)	1	60
Frecuencia (f)	f	$2f$

A más tiempo, más golpes, y a más frecuencia, más golpes.

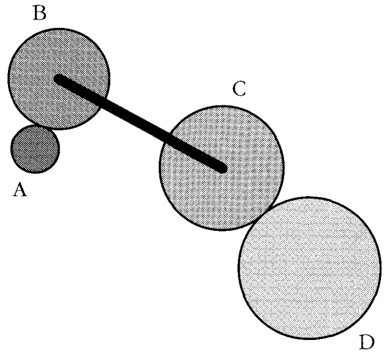
$$\frac{g}{tf} = k$$

Entonces

$$\frac{3}{1f} = \frac{x}{60 \cdot 2f}$$

$x = 360$ golpes

14. Se tienen juegos de engranajes unidos entre sí con un número variado de dientes (ver la figura siguiente): A con 25, B con 50, C con 55 y D con 60. Si A da 3 vueltas, ¿cuántas vueltas dará D ?



Solución:

A mayor número de dientes, menor es el número de vueltas si están engranados, pero los que tienen el eje en común darán el mismo número de vueltas.

Por tanto, los que están engranados son inversamente proporcionales, de la siguiente manera:

dientes • vueltas = $k \Rightarrow$
dientes • vueltas$_1$ = dientes$_2$ • vueltas$_2$ ....(I)

Para A y B: de (I) $25 \bullet 3 = 50 \bullet V_B$, entonces (:50)

$$1{,}5 = V_B$$

Para B y C: del esquema se observa que darán el mismo número de vueltas

$$1{,}5 = V_B = V_C$$

Para C y D: de (I) $55 \bullet 1{,}5 = 60 \bullet V_D$, entonces (:60)

$$\frac{55 \bullet 1{,}5}{60} = 1{,}375 = V_D$$

15. Pintar un cubo compacto de madera cuesta 24 soles. ¿Cuánto costará pintar otro cubo cuyo volumen es 8 veces mayor que el anterior?

Solución:

$$\frac{\text{obra}}{\text{costo}} = K$$

Volumen 1 = 1_1^3
Volumen 2 = $1_1^3 = 81_1^3$
Entonces $1_2 = 21_1$ ....(I)
Se va a pintar en el primer cubo un área de 61_1^2.
En el segundo cubo, se pintará un área de 61_2^2.
Entonces, se tendrá la siguiente relación:

$$\frac{61_1^2}{24} = \frac{61_2^2}{C_1} \text{ .... (II)}$$

C_2 = 96 soles

16. En una elección, el 40% votó por A, el 30% por B, el 20% por C y el resto se abstuvo. En una segunda vuelta, se debe votar por A o B. El 80% de los que votaron por C votan por A y el resto se abstiene. Si los que se abstuvieron la segunda vez suman 28, ¿cuántos votaron la segunda vez por A?

Solución:

Sea el número total de votantes $100x$.
$40x$ votos recibió A, $30x$ votos recibió B y $20x$ votos recibió C.
$10x$ se abstuvieron.

El 80% de C es $\frac{80}{100} \bullet 20x = 16x$

que serán los que votarán en segunda vuelta por A. Si el resto de C se abstiene, entonces tendremos $4x$ abstenciones. Suponiendo que se mantienen los votos de A y B de la primera vuelta, entonces el número total de abstenciones será de $14x$.

$14x = 28$

$x = 2$

El total de votantes por A en la segunda vuelta será de $40x + 16x = 56x$, que es igual a 112.

17. En un partido de fútbol de 90 minutos de juego, se pierde el 10% en retención de pelota, el 10% del tiempo restante en infracciones y el 10% del tiempo que ahora resta en amonestaciones. ¿Cuántos minutos de juego efectivo se realizará en el partido de fútbol?

Solución:

Tiempo	Se pierde	Queda
90	$\frac{10}{100} \bullet 90$	$\frac{90}{100} \bullet 90 = A$
A	$\frac{10}{100} \bullet A$	$\frac{90}{100} \bullet A = B$
B	$\frac{10}{100} \bullet B$	$\frac{90}{100} \bullet B = C$

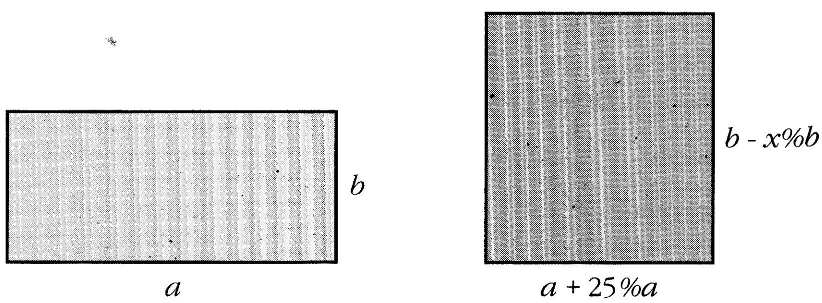
Reemplazamos los valores de la tabla

$$C = \frac{90}{100} \bullet \left(\frac{90}{100}\left(\frac{90}{100}.90\right)\right)$$

$$C = \frac{6561}{100} = 65{,}61 \text{ minutos}$$

18. Si se aumenta el largo de un rectángulo en 25%, ¿en qué porcentaje se debe disminuir el ancho para que el área no varíe?

Solución:



$$ab = (a + 25\%a)(b - x\%b)$$

$$ab = \frac{125a}{100} \bullet \left(\frac{100b - xb}{100}\right)$$

$$ab = \frac{125a}{100} \bullet \frac{b(100 - x)}{100}$$

$$10\ 000 = 125(100 - x)$$

$$80 = 100 - x$$

$$x = 20\%$$

19. Se mezclan 3 lt de un ácido al 30% con 9 lt al 70% y al resultado se le agrega un diluyente hasta obtener una concentración al 50%. ¿Cuántos litros del diluyente se empleó?

Solución:

Componentes	Vol_T	%	$V_{ácido}$
Ácido 1	3	30	$\frac{30}{100} \bullet 3 = 0{,}9$
Ácido 2	9	70	$\frac{70}{100} \bullet 9 = 6{,}3$
Diluyente	x	0	0
Mezcla	$12 + x$	50	7,2

$$\frac{50}{100}(12 + x) = 7{,}2$$

$$12 + x = 14{,}4$$

$$x = 2{,}4 \ lt$$

En los problemas de mezclas, recuerde que la concentración final siempre estará entre las concentraciones de los componentes de la mezcla.

Ejercicios propuestos

1. La media aritmética de dos números es 10 y la media geométrica de los mismos es 8. Calcular el menor de dichos números.
R. 4

2. El mayor y el menor promedio de dos números son 18 y 200 respectivamente. De los 3 promedios posibles, calcular el que no es el mayor ni tampoco el menor.
R. 60

3. Hallar el promedio de los números siguientes:

$$\underbrace{40;\ 40;\ 40;\ \ldots\ 40}_{a \text{ veces}} \quad \text{y} \quad \underbrace{50;\ 50;\ 50;\ \ldots\ 50}_{3a \text{ veces}}$$

R. 47,5

Recuerde que hemos visto tres clases de promedios: aritmético, geométrico y armónico.

4. En el sistema de calificación de una universidad, las prácticas tie peso 2, el examen parcial vale por 3 y el final por 5. Si mi prom de prácticas es 10, tengo 09 en el examen parcial y 12 en el f ¿cuál será mi promedio? Y sabiendo que los cursos se aprue con 10,5, ¿lograré aprobar?
R. Mi promedio es 10,7 y ello quiere decir que apruebo el cu (pero debo estudiar más).

5. Se desea repartir 50 lt de leche entre tres niños de 2, 3 y 5 años la cantidad repartida debe ser proporcional a sus edades, ¿cuá le tocará al niño de 2 años?
R. 10 lt

6. Tres negociantes se asocian invirtiendo cantidades de dinero que s proporcionales a 3, 9 y 11. Sabiendo que el segundo aporta S/. 5 0 menos que la suma de los otros dos, ¿cuánto aportó el segundo?
R. El segundo aportó S/. 9 045

7. La suma de tres números es 18 000 y estos están en relaci inversamente proporcional a 6, 8 y 12. Hallar los tres números.
R. 8000, 6000, 4000

8. La magnitud A es DP a la magnitud B cuando $A = 51$ y $B = 3$. Hallar el valor que toma B cuando $A = 34$.
R. 2

9. Se sabe que una magnitud A es inversamente proporcional a otra B Hallar el valor de A sabiendo que si este disminuye en 36 unidades el valor de B varía en un cuarto.
R. 180 es el valor de A

10. La construcción de un puente puede terminarse con 63 obreros en 18 días. Pero, con el fin de terminarla 5 días antes, a los 4 días de haber comenzado se les une una cuadrilla de cierto número de trabajadores. ¿Cuántos obreros se unieron a la obra?
R. 35 obreros

11. Trabajando 6 horas diarias durante 5 días, 3 panaderos pueden fabricar 600 panes o 200 bizcochos. ¿En cuántas horas fabricarán 500 panes y en cuántas 500 bizcochos?
R. 25 y 75 horas

Revise el procedimiento de los ejercicios resueltos y la teoría.

12. Un hombre y dos niños pueden realizar una obra en 10 días. Determinar la duración de un trabajo 4 veces más difícil hecho por 2 hombres y un niño tomando en cuenta que la relación de sus eficiencias es de 3 a 2.
R. 35 días

13. Un grupo de obreros tenía que hacer un trabajo en 20 días, pero debido a que 3 de ellos se enfermaron, tuvieron que trabajar 4 días más. ¿Cuántos obreros trabajaron?
R. Trabajaron 16 obreros.

14. Una pieza de fundición pesa en bruto 45,5 kg y 43,25 kg después de torneada. ¿Cuánto porcentaje de su peso ha perdido aproximadamente?
R. 4,945%

15. En una granja, el 20% del total de animales son vacas, el 45% chivos y el 35% carneros. Si el número de vacas fuera el triple, ¿qué porcentaje del total serían los carneros?
R. 25% son carneros.

16. En un corral hay 80 pollos y 120 patos. ¿Cuántos patos se deben ir para que el porcentaje de pollos presente aumente en un 40%?
R. 100 patos.

17. Un trabajador recibe un descuento del 20% de su salario. Para volver a recibir su salario original, ¿qué porcentaje del salario actual se le debe aumentar?
R. 25% del salario actual.

18. El precio de una manzana fue 20% mayor en mayo que en abril, y en junio 30% menor que en mayo. Si en abril una manzana costaba S/. 5,00, ¿en cuánto disminuyó el precio de mayo a junio?
R. S/. 1,8

19. Si el lado de un cuadrado aumenta en 50%, ¿en qué porcentaje aumenta el área?
R. 125%

20. Una solución contiene 70 g de azúcar en 140 g de chicha. ¿Cuánta azúcar se debe agregar para que la solución sea del 60% de azúcar respecto de la chicha?
R. 140 g.

21. Una solución se hace mezclando *a* gramos de sal pura con *b* gramos de agua. ¿Cuánto por ciento más de sal respecto del agua hay en la solución?

R. $\frac{a-b}{a+b} \bullet 100$ más de sal respecto del agua.

22. A un artículo, cuyo precio de lista es el doble del costo, se le hace una rebaja del 25%. ¿Cuál es el porcentaje de utilidad respecto del costo?
R. Se gana el 50% del precio de costo.

23. Las utilidades de la minera "ECOLOGÍA Y RESPETO" se repartirán en julio a sus accionistas mayoritarios:
El Sr. Manuel aportó S/. 150 000; el Sr. Marco S/. 350 000 y el Sr. Diego S/. 450 000. Las utilidades ascienden a S/. 57 000 000. ¿A cuánto equivalen las utilidades de cada uno de los accionistas?
R. 9, 21 y 27 millones de soles, respectivamente.

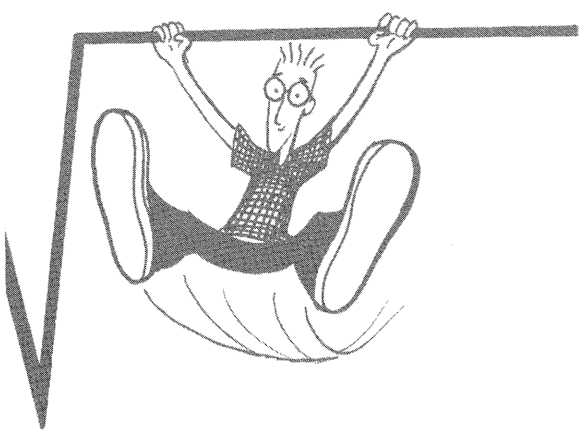
24. La mano de obra para cierto proyecto es proporcional al cuadrado del tiempo de duración e inversamente proporcional al cubo de la inflación que presenta el país en ese instante.
Para el proyecto HAKAN, el costo de la mano de obra es de 16 soles por hora, la duración de la obra es de 100 días y la inflación del país era del 2,5%.
¿Cuál será el precio de la mano de obra en el proyecto SLATAN si tiene un período de duración de 150 días y la inflación es del 5%?
R. S/. 4,5

25. Para el pago de salarios de cierta compañía, el gerente aplicará la siguiente fórmula para descuentos:
El descuento será directamente proporcional al número de tardanzas que tiene durante el mes y directamente proporcional al número de días no trabajados si es que estos son mayores a 7. A un empleado que llegó tarde 3 días y faltó 9 le descontaron S/. 600. ¿Cuánto se le descontará a un empleado de igual rango si tuvo 6 tardanzas y faltó 2 días?
R. S/. 133,3

26. Una empresa pierde 7000 millones de dólares por la caída de la bolsa de valores. ¿Cuánto estarán perdiendo sus tres accionistas si sus capitales se relacionan así: el primero es al segundo como 2 es a 3, y el segundo es al tercero como 4 es a 5?
R. Perderán 1600, 2400 y 3000 millones de dólares.

27. El precio de un paquete de acciones es proporcional al número de acciones contenidas y también proporcional al cuadrado del tiempo en años de la empresa.
Si para las acciones de CONSTRUCTORES FILÓSOFOS S.A el paquete de 1000 acciones está valorizado en S/. 1 500 000 y esta empresa posee 10 años en el mercado, ¿cuánto costarán 2 paquetes de acciones con 1500 acciones c/u si una empresa tiene 20 años?
R. S/. 18 000 000

28. El costo de una llamada es proporcional al número de minutos de duración, y también proporcional al cuadrado de la distancia de conexión. Además, el costo es inversamente proporcional al número de timbradas que da el teléfono antes de iniciar la conversación.
Si una llamada de 10 min de duración a una distancia de 15 km y cuyo número de timbradas fue de 8 tuvo un costo de 5 soles, ¿cuánto se cobrará por una llamada de la mitad de duración y triple de distancia que tuvo 4 timbradas antes de iniciada la conversación?
R. S/. 45



Capítulo 3
ÁLGEBRA: POTENCIACIÓN, PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

3.1 Potenciación

A continuación, le damos una serie de fórmulas que deberá memorizar.

La mejor manera de aprenderlas es realizando varios ejercicios.

3.1.1 Definición

Si un número a es multiplicado por sí mismo n veces, se dice que a está elevado a la potencia n.

$$a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a \ldots a = a^n$$

Donde a es la base,
n es el exponente,
a^n es la potencia.

3.1.2 Propiedades

a. Producto de potencias de igual base

$$a^n \bullet a^m = a^{m+n}$$

b. Cociente de potencias de igual base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

c. Exponente cero

$a^0 = 1$
Donde: $a \neq 0$

Recuerde:

0^0 es indeterminado (más adelante veremos ejercicios en los que trabajaremos con esta y otras indeterminaciones).

d. Exponente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

En general,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Donde: $a, b \neq 0$

e. Potencia de un producto

$$(ab)^n = a^n b^n$$

f. Potencia de un cociente

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Donde $b \neq 0$

g. Potencia de potencia

$$(a^m)n = a^{mn}$$

Ejemplos:

1. $2^m \bullet 2^{3m} \bullet 2^{4m} = 2^{m+3m+4m} = (2^8)^m = 256^m$

2. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$

3.2 Productos notables

3.2.1 Definición

Los productos notables son identidades algebraicas que presenta una manera abreviada y fácil de resolver una multiplicación.

3.2.2 Principales productos notables

a. Binomio al cuadrado

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

b. Suma por diferencia (diferencia de cuadrados)

$$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$$

c. Trinomio al cuadrado

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

d. Identidades de Legendre

$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2\,(a^2+b^2)$

$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

e. Binomio al cubo

Fórmulas desarrolladas:

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Fórmulas parcialmente factorizadas:

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a+b)$

$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a-b)$

f. Binomio por trinomio (suma o diferencia de cubos)

$(a+b)\,(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

$(a-b)\,(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Ejemplos:

1. $\left(5+\sqrt{2}\right)^2 = 5^2 + 2(5)\left(\sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{2}\right)^2$

   $\Rightarrow 25 + 10\sqrt{2} + 2 = 27 + 10\sqrt{2}$

2. $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow 3-2=1$

Resuelva los primeros casos identificando primero a y b de los productos notables. Luego, aplique la fórmula que corresponda a la forma de la ecuación, pero mantenga las cantidades entre paréntesis.

3.3 Factorización

3.3.1 Definición

Factorizar es representar una expresión algebraica como producto de sus factores buscando la mayor cantidad posible de los mismos. Es la operación contraria a la multiplicación, pues cuando factorizamos una expresión dada, queremos averiguar cuál fue la multiplicación que generó dicha expresión.

3.3.2 Principales métodos para factorizar

a. Factor común

- Factor común monomio

  $ab + ac = a\,(b+c)$

- Factor común polinomio

$$a\,(x + y) + b\,(x + y) = (x + y)\,(a + b)$$

b. Factor común por agrupación

$$ax + by + bx + ay = (ax + bx) + (ay + by)$$
$$x\,(a + b) + y\,(a + b)$$
$$(a + b)\,(x + y)$$

c. Trinomio cuadrado perfecto

Los casos *c, d* y *e* corresponden a los productos notables de los casos *a, b, e* y *f.*

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

d. Diferencia de cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$$

e. Factorizaciones cúbicas

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$$
$$a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$$

f. Trinomio de la forma $Ax^{2n} + Bx^n + C$

$$Ax^{2n} + Bx^n + C = (ax^n + u)(bx^n + v)$$

Se debe escoger los coeficientes a, b, u y v de tal manera que cumplan:

1. $ab = A$
2. $uv = C$
3. $av + bu = B$

Ejemplos

Recuerde:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

1. $x^3 + x^2 = x^2\,(x + 1)$
2. $a\,(c + 2) + b\,(c + 2) = (a + b)\,(c + 2)$

Ejercicios resueltos

1. Calcular $E = 4^{2^{-1}}$.

Solución:

Siguiendo la secuencia:

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow E = 4^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$$

2. Reducir $E = \dfrac{2^{n+2} - 2^{n+4}}{2^{n+1} - 2^{n+2}}$.

Solución:

Factorizando 2^n en el numerador y denominador, tenemos:

$$E = \frac{2^n(2^2 - 2^4)}{2^n(2^1 - 2^2)}.$$

Simplificamos el 2^n y desarrollamos las potencias:

$$E = \frac{(4)-(16)}{(2)-(4)} = \frac{-12}{-2} = 6$$

Recuerde:

$$\left(\frac{a}{b}^{-n}\right) = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

3. Simplificar $E = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 2\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + (0,\widehat{3})^{-1}\right]^{0,5}$.

Solución:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \qquad 2\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 2(9) = 18 \qquad \left(\frac{3}{9}\right)^{-1} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\Rightarrow \quad E = [4 + 18 + 3]^{1/2} = (25)^{1/2} = \sqrt{25} = 5$$

Recuerde:

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

4. Reducir $R = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) + 1$.

Solución:

Primero resolvemos el producto de binomios. Luego, desarrollamos la diferencia de cuadrados.

$$(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) = (\sqrt{x})^2 - 1^2 = x - 1$$

$\Rightarrow$ R= x -1+1 = x

Recuerde:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

> **Recuerde:**
> $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

5. Si $mn = 2$ y $m + n = 2\sqrt{2}$, calcular $m^2 + n^2$.

Solución:

Elevamos $m + n = 2\sqrt{2}$ al cuadrado.

$$(m+n)^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$$

$m^2 + 2(mn) + n^2 = 8$

Reemplazamos el valor de mn:

$m^2 + 2(2) + n^2 = 8$ $\qquad$ (-4)

$m^2 + n^2 = 4$

6. Factorizar $x^4 + 2x^3 + x^2$.

Solución:

Como se repite x^2, el factor común es x^2.

$x^2\,(x^2 + 2x + 1)$

trinomio al cuadrado perfecto

$\Rightarrow x^2\,(x + 1)^2$

> La factorización de los trinomios de esta forma es muy importante.
>
> Por eso, debe practicarla con más ejercicios.

7. Factorizar $A = a^3 + 2a^2 + a + 2$.

Solución:

Agrupamos términos 2 a 2:

$$A = (a^3 + 2a^2) + (a + 2)$$

Factorizamos cada grupo por separado:

$$A = a^2\,(a + 2) + (a + 2)$$

Como se puede notar, $(a + 2)$ es un factor común para los dos grupos.

$$A = (a + 2)\,[a^2 + 1]$$

8. Factorizar $F = x^2 + 6x + 8$.

Solución:

$$\begin{array}{lcl} \underline{x^2} + 6x + \underline{8} & & \\ x & & 4 \\ x & & 2 \end{array}$$

Condición: $2x + 4x = 6x$

Luego, $F = (x + 4)(x+2)$.

9. Factorizar $E = m^5 + 2m^4 - m^3 - 2m^2$.

Solución:

$\Rightarrow E = m^2(m^3 + 2m^2 - m - 2)$

$m^2 [m^2 (\underline{m + 2}) - (\underline{m + 2})]$

$E = m^2 (m + 2) [m^2 - 1]$

$\Rightarrow E = m^2(m + 2) (m + 1) (m - 1)$

Ejercicios propuestos

1. Resolver $2^{3^{8^x}} = 512$

   R. $1/3$

2. Resolver $3(2^{x+3}) = 192(3^{x-3})$

   R. 3

3. Hallar el valor de x si $\left(\frac{9}{4}\right)^x \bullet \left(\frac{8}{27}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$

   R. 4

4. Calcular $E = \frac{x^2 y^3 \bullet (x^3 y^{-5})^2}{((xy^3)^2)^{-3}}$

   R. $E = x^{14}y^{11}$

5. Si $x^{x^x} = 3$, hallar el valor de $E = x^{x^{x+x^x}}$

   R. 27

6. Calcular $(x + y)^3 + (x - y)^3$

   R. $2x^3 + 6xy^2$

7. Efectuar $E = (a + b)^3 + (a - b)^3 + (a + b)(a - b)$

   R. $2a^3 + 6ab^2 + a^2 - b^2$

8. Factorizar $R = (x^9 - 1)$

   R. $R = (x - 1) (x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$

9. Factorizar $E = a^4 - 16$

   R. $E = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2)$

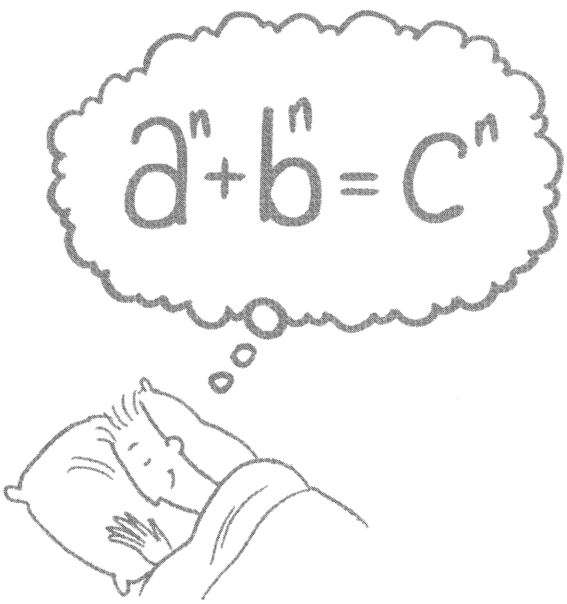
Para resolver estos ejercicios, debe haber memorizado primero las fórmulas que se presentaron en la parte de teoría.

10. Factorizar $Z = x^3 - 9x^2 + 9x - 81$

    R. $Z = (x - 9)(x^2 + 9)$

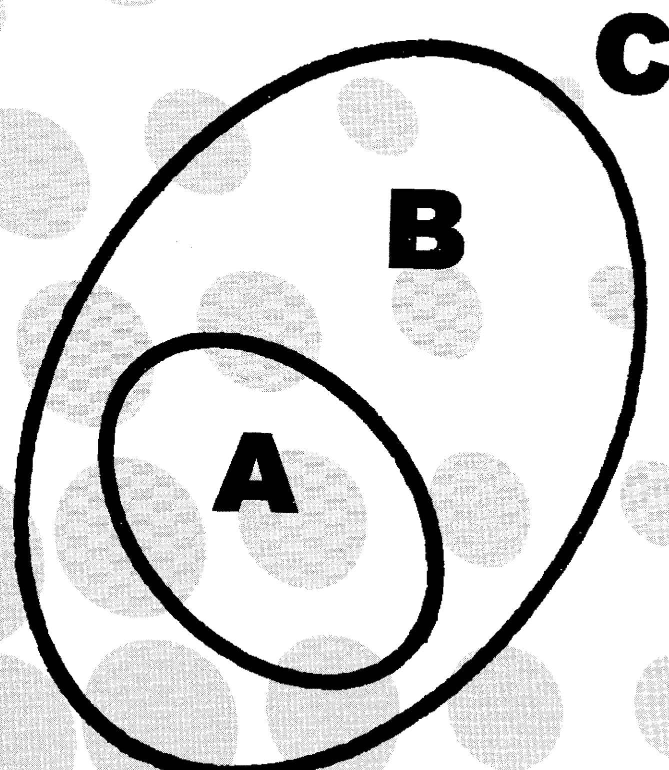
11. Factorizar $F = x^6 - 4x^3 - 32$

    R. $F = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x^3 + 4)$



UNIDAD II

Lógica Proposicional y Teoría de Conjuntos



Capítulo 4
INTRODUCCIÓN A LA LÓGICA PROPOSICIONAL

4.1 Definición

La lógica es una ciencia formal, es decir, es una ciencia que posee un conjunto de elementos fundamentales y reglas a través de las cuales estos se relacionan para dar lugar a elementos más complejos.

La lógica estudia la validez de los argumentos. Más precisamente, estudia la validez formal de los argumentos deductivos. Un argumento es un discurso a partir del cual, por medio de premisas, se defiende una conclusión.

La lógica tiene como propósito discriminar entre la validez y la no validez. Esta estrategia consiste en tres grandes tareas:

1. Crear lenguajes simbólicos.
2. Traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico.
3. Crear métodos decisorios.

4.2 Lógica proposicional

La proposición es lo que la oración significa. Es el significado de ciertas clases de oraciones, de oraciones aseverativas (que niegan o afirman algo). Sintácticamente, se clasifican en simples o compuestas.

En lógica, buscamos determinar el valor de verdad de las proposiciones compuestas a partir del valor de verdad de las proposiciones simples. El valor de verdad de estas últimas nos es indiferente en la lógica proposicional. Lo que nos interesa es si a partir de las proposiciones simples se deduce o no el significado de la proposición compuesta. En otras palabras, queremos saber bajo qué condiciones se dice que una proposición es V (verdadera) o F (falsa).

4.2.1 Proposiciones simples

Son aquellas que no tienen operadores lógicos proposicionales en su estructura central.

4.2.2 Proposiciones compuestas

Son aquellas que tienen al menos un operador lógico proposicional en su estructura central.

Los operadores lógicos proposicionales son:

a. Negación: ni, no, nunca...
b. Conjunción: y, pero, además...
c. Disyunción: o...
d. Condicional: por lo tanto, luego, en consecuencia, si...
e. Bicondicional: si y sólo si...

Ejemplo:

1. Indique si las siguientes proposiciones son simples o compuestas:

   - Joaquín no dijo que vendrá.
   - Joaquín dijo que no vendrá.

   Solución:

   La primera es compuesta. La segunda es simple.

   La diferencia es que en el segundo caso el *no* no afecta a la estructura central.

Entonces, el trabajo de la lógica proposicional consiste en analizar proposiciones complejas y descubrir su valor de verdad a partir del conocimiento del valor de verdad de sus proposiciones simples. El método que utilizaremos consiste en lo siguiente:

1. Descomponer la proposición compuesta en proposiciones simples y operadores.

2. Representar la proposición mediante un sistema adecuado. Este sistema consiste en asignar símbolos tanto a las proposiciones simples como a los operadores. La relación entre las proposiciones y los operadores se hará mediante un conjunto de reglas. Si aplicamos bien los símbolos y las reglas, la proposición compuesta original estará representada por una *fórmula bien formada* (fbf).

3. Construir una tabla en la que aparezcan todas las combinaciones posibles de los valores de verdad de las proposiciones simples. A partir de ella obtendremos, para cada caso, el valor de verdad de la proposición compuesta. A cada combinación de los valores de verdad de las proposiciones simples le llamaremos *Estado Posible del Mundo* (EPM).

4.3 El lenguaje de la lógica proposicional

4.3.1 Símbolos

a. Con las letras p, q, r, s,... designaremos a las proposiciones simples.

b. Los símbolos de los operadores serán: negación (~), conjunción (∧), disyunción (∨), condicional (→) y bicondicional (↔)

c. Usaremos los signos de agrupación convencionales de la matemática: ( ), [ ] y { }

d. Con las letras A, B, C, ... designaremos las generalizaciones de fbf.

4.3.2 Reglas de formación

Son instrucciones que nos dicen cómo armar este lenguaje. Son cuatro:

a. Toda variable proposicional por sí sola es una fórmula bien formada (fbf).

b. Si A es una fbf, la negación de A $(\sim A)$ también lo es.

c. Si A y B son fbf, entonces $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ y $(A \leftrightarrow B)$ también lo son.

d. Nada más es una fbf. Ninguna otra combinación de símbolos es una fbf.

Observaciones:

- Toda fbf tiene una jerarquía clara entre sus operadores. El operador con más jerarquía es el que afecta a más partes de la fbf.
- Una fórmula toma el nombre de su operador con mayor jerarquía.

4.3.3 El Estado Posible del Mundo (EPM)

Cada fila es un *Estado Posible del Mundo* (EPM). El número de EPM está en función del número de variables.

Si tengo dos variables y cada una de ellas puede ser verdadera o falsa, entonces tengo cuatro Estados Posibles del Mundo (es decir, cuatro combinaciones posibles).

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

El número de EPM se calcula con la fórmula

$$\#EPM = 2^n$$

Donde n es la cantidad de variables.

4.3.4 Interpretación de los operadores

a. Negación (no...)

Las proposiciones:

- Joaquín no canta.
- Es falso que Joaquín cante.
- De ninguna manera Joaquín canta.

Son equivalentes. Están compuestas por la preposición simple p: *Joaquín canta* y por el operador de negación (~).

Cualquiera de las proposiciones anteriores se puede expresar sin ambigüedades por

~p: ~*Joaquín canta*

Existen dos Estados Posibles del Mundo: *p es V* o *p es F*. En el primer caso, *~p* es *F*, y en el segundo, *~p* es *V*. Entonces podemos construir la siguiente *tabla de verdad:*

p	~p
V	F
F	V

b. Conjunción (... y...)

Examine las siguientes proposiciones:

- Joaquín canta y María Luisa canta.
- Joaquín y María Luisa cantan.
- Joaquín canta. María Luisa también.

Son equivalentes. Están compuestas por las proposiciones simples *p*: *Joaquín canta*, *q*: *María Luisa canta* y por el operador de conjunción (∧).

Cualquiera de las proposiciones anteriores se puede expresar sin ambigüedades por

p ∧ q: Joaquín canta ∧ María Luisa canta.

Como tenemos dos proposiciones, hay cuatro EPM (2^2). Para que $p \wedge q$ sea verdadera, ambas proposiciones deben ser verdaderas (basta con que alguno de los dos no cante para que la proposición sea falsa). Entonces, podemos construir la siguiente tabla de verdad:

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Observe que sólo en el primer caso $p \wedge q$ es verdadera.

c. Disyunción (... o...)

Examine las siguientes proposiciones:

- Cantan o Joaquín o María Luisa.
- O Joaquín canta o María Luisa canta.
- Joaquín o María Luisa cantan.

Son equivalentes. Están compuestas por las proposiciones simples p: *Joaquín canta*, q: *María Luisa canta* y por el operador de disyunción ($\vee$).

Cualquiera de las proposiciones anteriores se puede expresar sin ambigüedades por

$$p \vee q\text{: Joaquín canta } \vee \text{ María Luisa canta.}$$

Como tenemos dos proposiciones, existen cuatro EPM. Para que $p \vee q$ sea verdadera, tiene que cumplirse que al menos una de las proposiciones sea verdadera (es necesario que al menos uno de los dos cante). Entonces, podemos construir la siguiente tabla de verdad:

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Observe que sólo en el último caso $p \vee q$ es falsa.

d. Condicional (si..., entonces...)

Examine las siguientes proposiciones:

- Si María Luisa se ríe, Joaquín se alegra.
- Cada vez que María Luisa se ríe, Joaquín se alegra.
- Basta que María Luisa se ría para que Joaquín se alegre.

Son equivalentes. Están compuestas por las proposiciones simples *p*: *María Luisa se ríe*, *q*: *Joaquín se alegra* y el operador condicional ($\rightarrow$).

Cualquiera de las proposiciones anteriores se puede expresar sin ambigüedades por

p $\rightarrow$ q: María Luisa se ríe $\rightarrow$ Joaquín se alegra.

Como tenemos dos proposiciones, existen cuatro EPM. El único caso en que $p \rightarrow q$ será falsa, será cuando la primera proposición sea verdadera y la segunda sea falsa (es decir, la proposición será falsa si *María Luisa se ríe* y *Joaquín no se alegra*). En el resto de casos, será verdadera. Entonces, podemos construir la siguiente tabla de verdad:

p	q	p $\rightarrow$ q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observe que sólo en el segundo caso $p \rightarrow q$ es falsa.

e. Bicondicional (... si y sólo si...)

Examine las siguientes proposiciones:

- Sólo cuando María Luisa se ríe, Joaquín se alegra.
- Si Joaquín se alegra, es sólo porque María Luisa se ríe.
- Joaquín se alegra sólo cuando María Luisa se ríe.

Son equivalentes. Están compuestas por las proposiciones simples *p*: *María Luisa se ríe*, *q*: *Joaquín se alegra* y por el operador ($\leftrightarrow$).

Cualquiera de las proposiciones anteriores se puede expresar sin ambigüedades por

p $\leftrightarrow$ q: María Luisa se ríe $\leftrightarrow$ Joaquín se alegra.

Como tenemos dos proposiciones, existen cuatro EPM. La proposición $p \leftrightarrow q$ será verdadera cuando p y q tengan el mismo valor de verdad. Es decir, cuando ambas sean verdaderas o ambas sean falsas (*si María Luisa se ríe* y *Joaquín no se alegra*, la proposición será falsa; y si *María Luisa no se ríe;* pero *Joaquín se alegra*, la proposición también será falsa, pues la bicondicionalidad implica que ambos sucesos deben aparecer necesariamente juntos). Entonces, podemos construir la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Observe que sólo en el primero y en el último caso, $p \leftrightarrow q$ es verdadera.

4.3.5 Simbolización de las proposiciones

Si queremos conocer el valor de verdad de una proposición, debemos primero simbolizarla en el lenguaje de la lógica proposicional. Para ello, debemos identificar las proposiciones simples y asignarles una variable. Luego, debemos identificar cuáles operadores enlazan a las proposiciones.

Ejemplo:

Simbolice la siguiente proposición:

A: No es posible que los pájaros vuelen y tengan alas.

Solución:

La proposición *A* es la negación de la proposición *B*: es posible que los pájaros vuelen y tengan alas.

Esta proposición está compuesta por dos proposiciones simples y el operador de conjunción $\wedge$:

p: Los pájaros vuelan.

q: Los pájaros tienen alas.

Así, la proposición *B* se puede expresar como

$$B: p \wedge q$$

Y la proposición *A* se puede expresar como

$$A: \sim(p \wedge q)$$

4.3.6 Análisis de las fbf

Dos métodos principales para analizar las fbf son el de las tabl de verdad y el llamado método abreviado. Como se trata de un capítu introductorio, explicaremos solamente el método de las tablas de verdad

Este método consiste en construir una tabla de dos column principales. En la primera, se colocan las proposiciones simples y tod sus EPM; en la segunda, se coloca la proposición que se quiere analiza Debemos analizar los valores de verdad para cada EPM respetando jerarquía de los operadores.

Ejemplo:

Construir la tabla de verdad de la proposición *A,* cu simbolización es:

$$p \rightarrow \sim q$$

Solución:

Primero escribimos todos los EPM de las proposiciones simple La tabla queda de la siguiente manera:

p	q	p → ~q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Después, colocamos el valor de verdad del operador de meno jerarquía. En este caso, es evidente que podemos colocar los valores d verdad de p y de $\sim q$ en cada caso.

p	q	p	→	~q
V	V	V		F
V	F	V		V
F	V	F		F
F	F	F		V

A continuación, escribimos los valores de verdad que se obtiene del condicional según la tabla que construimos en el punto 4.3.4.d.

p	q	p	→	~q
V	V	V	F	F
V	F	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	F	V	V

Por lo tanto, los valores de verdad de la proposición A son FVVV.

4.4 Proposiciones especiales

A partir del valor de verdad de las proposiciones simples, podemos determinar el valor de verdad de las proposiciones compuestas. Este es un procedimiento inferencial. Ahora bien, existen algunos casos en los que la validez de la proposición es independiente del valor de verdad de las premisas. Estos casos son dos: las tautologías y las contradicciones.

Las proposiciones que son siempre verdaderas, sin importar la verdad o falsedad de las proposiciones simples que la componen, se llaman *tautologías*. En lógica se les llama también *principios*, pues son verdades absolutas que no dependen del EPM. No es posible que una *proposición tautológica* sea falsa.

Una inferencia tautológica es aquella que siempre será verdadera para todos los EPM.

Ejemplo 1:

«Toda proposición verdadera es verdadera».

Simbolizada sería:

$$«p \rightarrow p»$$

Su tabla de verdad es:

p	p	→	p
V	V		
F	V		

Observe que en ambos casos la proposición es verdadera.

Ejemplo 2:

«No es posible que algo sea y no sea al mismo tiempo».

Simbolizada sería:

$$«\sim (p \wedge \sim p)»$$

Su tabla de verdad es:

p	~	(p	∧	~p)
V	V		F	
F	V		F	

Ahora bien, existen también proposiciones que son siempr sin importar la verdad o falsedad de las proposiciones simples componen. Estas proposiciones se llaman *contradicciones*.

Ejemplo 1:

«Algo es y no es».

Simbolizada sería:

$$p \wedge \sim p$$

Su tabla de verdad es:

p	p ∧ ~p
V	F
F	F

Las proposiciones que no son ni tautologías ni contradicc es decir, aquellas que dependen de su EPM para determinar su val verdad, se llaman *contingentes*.

4.5 Lógica cuantificacional

La lógica proposicional, como hemos dicho, busca determir valor de verdad de una proposición compuesta a partir de los valor verdad de las proposiciones simples. En las proposiciones simples, individuo se le atribuye una propiedad. Sabemos que una proposició una oración y que está compuesta, por lo tanto, de un sujeto y un predic entonces, el individuo correspondería al sujeto y la propiedad que atribuye correspondería al predicado.

Si enunciamos, por ejemplo, la proposición *Joaquín ca cantando*, *Joaquín* sería el individuo y *camina cantando* sería la propie que se le atribuye a Joaquín. Ahora bien, la lógica proposicional n capaz de establecer una relación entre la proposición mencionada y, ejemplo, esta otra: *María Luisa camina cantando*. La lógica proposicic analiza, por decirlo de alguna manera, el valor de verdad de la fı completa, pero no distingue entre los individuos y sus propiedades el interior de las proposiciones. En lógica cuantificacional, en caml sí podemos percatarnos de que se trata de dos individuos, a sal Joaquín y María Luisa, que poseen una propiedad común: cami cantando.

4.5.1 Funciones proposicionales

Los ejemplos anteriores pueden generalizarse mediante la fórmula *x camina cantando*. x designa a los individuos que pertenecen al conjunto de los que caminan cantando. La fórmula proposicional *x camina cantando* no es una proposición, pues no puede establecerse cuál es su valor de verdad. Pero cuando se reemplaza x por un individuo específico, la fórmula se convierte en una proposición.

Por ejemplo, no es posible determinar si la función proposicional *x es futbolista* es verdadera o falsa. Pero sí podemos saber si la proposición, por ejemplo, *Joaquín es futbolista,* es verdadera o falsa. Basta con saber si el individuo Joaquín pertenece al conjunto de aquellos que son futbolistas.

Si P es el conjunto de los futbolistas, entonces la función proposicional *x es futbolista* se representa por P_x.

Podemos relacionar dos funciones proposicionales con los operadores lógicos; por ejemplo: $P_x \wedge Q_x$, que se lee *x es P y x es Q*. Esta expresión sigue siendo una función proposicional, pues no es posible establecer su valor de verdad.

4.5.2 Cuantificadores

Ahora bien, hemos visto que las funciones proposicionales pueden relacionar conjuntos. Sin embargo, se plantea el problema de si es o no posible dicha relación, es decir, de cuántos elementos satisfacen la relación planteada. Aquí entran a tallar los cuantificadores.

Es distinto decir *x es P y x es Q* (función proposicional) que decir:

«Para *todos* los x se cumple que x es P y x es Q».
«Para *algunos* x se cumple que x es P y x es Q».
«Para *algunos x no* se cumple que x es P y x es Q».
«Para *ningún* x se cumple que x es P y x es Q».

Las expresiones *todos*, *algunos*, *algunos no* y *ninguno* son llamadas cuantificadores.

Algunos ejemplos de proposiciones con cuantificadores son los siguientes:

- Todos los hombres son mortales.
- Algunos gatos son grises.
- Algunos amigos no han venido.
- Ningún alumno habla francés.

a. Clasificación

Podemos clasificar los cuantificadores en cuantificadores univ
les y cuantificadores existenciales.

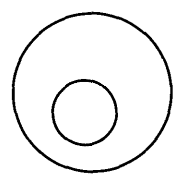
Los cuantificadores que aluden a la totalidad de un conjuntc
los cuantificadores universales. Estos son *todos* y *ninguno.*

Los cuantificadores que aluden a por lo menos un element
un conjunto son los cuantificadores existenciales. Estos son *algu*
algunos no.

b. Expresión gráfica de los cuantificadores

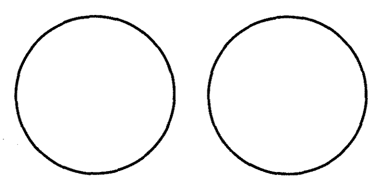
En los cuantificadores universales, está comprometida la total
de los conjuntos.

«Todos los hombres son mortales».



Todo el conjunto de los hombres está incluido en el conjunto
las cosas que son mortales.

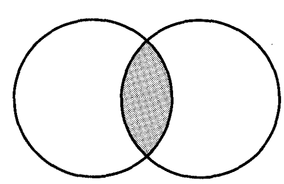
«Ningún gato vuela».



Ningún elemento del conjunto de los gatos pertenece al conjun
de las cosas que vuelan.

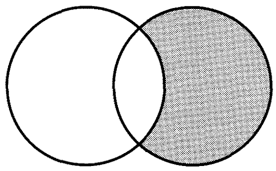
En los cuantificadores existenciales, basta con que se comprome
un elemento de los conjuntos.

«Algunos hombres duermen hoy».



Basta con que exista un hombre que duerma hoy para que la proposición sea verdadera.

«Algunos loros no hablan».



Basta con que exista un loro que no hable para que la proposición sea verdadera.

c. Negación de afirmaciones

La negación de un cuantificador universal se realiza con un cuantificador particular y no con otro cuantificador universal. Esto se debe a que para que una afirmación sea verdadera, es necesario que sea siempre verdadera, es decir, que no exista algún elemento que contradiga lo afirmado.

Ejemplo:

«Todos los perros ladran».

Si existiera algún perro que no ladrara, la afirmación anterior sería falsa.
Por lo tanto, la negación de dicha afirmación será:

«Algún perro no ladra».

Es importante resaltar que la negación de *Todos los perros ladran* no es (como se podría pensar) *Ningún perro ladra.* Esa afirmación sería lo contrario, mas no la negación lógica.

Nota: se debe tener mucho cuidado con las negaciones dobles, pues la negación de una negación es una afirmación. Es necesario tener en cuenta que todas las afirmaciones que comiencen con *ninguno* ya de por sí son negaciones. Para negarlas, es suficiente con cambiar el *ninguno* por *alguno.*

d. Implicaciones materiales

Una implicación material es una afirmación de la forma:

$$p \rightarrow q$$

Ejemplo:

«Si estudias en una buena universidad, entonces vas a ser un bu profesional».

Es decir, si ocurre p, entonces necesariamente ocurrirá q. Lo úni que se puede concluir lógicamente es:

$$\sim q \rightarrow \sim p$$

Es decir, si no ocurre q, entonces no ocurrió p. En otras palabra en cualquier implicación material, la negación del consecuen implica la negación del antecedente. Por lo tanto:

«Si estudias en una buena universidad, entonces vas a ser un bu profesional».

$$p \Rightarrow q$$

Sólo se puede concluir (como implicación equivalente):

«Si no eres un buen profesional, entonces no estudiaste en u buena universidad».

$$\sim q \rightarrow \sim p$$

Es importante notar todas las otras combinaciones:

«Si eres un buen profesional, entonces estudiaste en una bue universidad».

$$q \rightarrow p$$

«Si no estudias en una buena universidad, entonces no vas a ser u buen profesional».

$$\sim p \rightarrow \sim q$$

No son necesariamente ciertas; por lo tanto, no podemos afirma que sean implicaciones materiales que se puedan concluir de l original.

Nota: cualquier pregunta con implicaciones materiales se pue deducir sin necesidad de formalizar, pero es recomendable hacerl con el objeto de no confundirse con alternativas que pueden pare cer correctas, aunque lógicamente no lo son.

Es suficiente recordar que si se cumple:

$$p \rightarrow q$$

Lo que sí puede deducirse es:

$$\sim q \rightarrow \sim p$$

Ejercicios resueltos

1. Indique si las siguientes proposiciones son simples o compuestas:

   - Joaquín y María Luisa juegan en el jardín.
   - Joaquín y María Luisa son primos.

   Solución:

   La primera es compuesta. La segunda es simple.
   La diferencia es que en el segundo caso no se conectan dos proposiciones, sino dos nombres.

2. Indique si la siguiente proposición es simple o compuesta.

   - Joaquín y María Luisa estudian juntos.

   Solución:

   Se trata de una proposición simple.
   No es posible separar la proposición.

3. Calcule el número de EPM para las variables p, q y r.

   Solución:

   Nos dan tres variables. Si aplicamos la fórmula, tendremos:

   $$\#EPM\ 2^n = 8$$

   Entonces, existen 8 EPM.

4. Calcule el número de EPM para las variables p, q, r y s.

   Solución:

   Nos dan cuatro variables. Si aplicamos la fórmula, tendremos:

   $$\#EPM\ 2^4 = 16$$

   Entonces, existen 16 EPM.

5. Simbolice la proposición:

   A: No es cierto que Joaquín se haya ido porque yo lo he visto en la casa.

   Solución:

   Podemos expresar la proposición A de la siguiente manera:

   Porque yo lo he visto en casa, (entonces) no es cierto que Joaquín se haya ido.

Tenemos dos proposiciones simples:
p: Yo lo he visto en casa.
q: Joaquín se ha ido.

Y dos operadores:
La negación de la proposición q ($\sim q$).
El condicional ($\rightarrow$)

Entonces, la proposición A se puede expresar como:

$$A\text{: } p \rightarrow \sim q$$

6. Simbolice la proposición:

A: Si Joaquín no llega a tiempo, entonces o Joaquín no sabe que María Luisa está en casa, o hay mucho tráfico en las calles.

Solución:

Tenemos las siguientes proposiciones simples:

p: Joaquín llega a tiempo.
q: Joaquín sabe que María Luisa está en casa.
r: Hay mucho tráfico en las calles.

Reconocemos, además, que el operador principal es el condicional. De las dos proposiciones enlazadas por el condicional, la primera es una negación y la segunda es una disyunción entre dos negaciones.

Entonces, la proposición se puede expresar como

$$A\text{: } \sim p \rightarrow (\sim q \vee r)$$

El operador principal es el condicional; por ello, podemos retirar los paréntesis y encerrar este operador entre dos puntos. Con ellos indicaremos que es el operador de mayor jerarquía.

$$A\text{: } \sim p \;.\!\rightarrow\!.\; \sim q \vee r$$

7. Construya la tabla de verdad de la proposición cuya simbolización es:

$$\sim p \;.\!\rightarrow\!.\; \sim q \vee r$$

Luego, indique qué clase de proposición es.

Solución:

Primero, escribimos todos los EPM de las proposiciones simples. La tabla quedaría de la siguiente manera:

p	q	r	$\sim p$	$.\rightarrow.$	$\sim q$	$\vee$	r
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Después, colocamos el valor de verdad de los operadores de menor jerarquía. En este caso, es evidente que podemos colocar los valores de verdad de $\sim p$ y de $\sim q$ en cada caso.

p	q	r	$\sim p$	$.\rightarrow.$	$\sim q$	$\vee$	r
V	V	V	F		F		V
V	V	F	F		F		F
V	F	V	F		V		V
V	F	F	F		V		F
F	V	V	V		F		V
F	V	F	V		F		F
F	F	V	V		V		V
F	F	F	V		V		F

A continuación, escribimos los valores de verdad que se obtienen de la disyunción $\sim q \vee r$.

p	q	r	$\sim p$	$.\rightarrow.$	$\sim q$	$\vee$	r
V	V	V	F		F	V	V
V	V	F	F		F	F	F
V	F	V	F		V	V	V
V	F	F	F		V	V	F
F	V	V	V		F	V	V
F	V	F	V		F	F	F
F	F	V	V		V	V	V
F	F	F	V		V	V	F

Por último, escribimos los valores de verdad del condicional.

p	q	r	$\sim p$	$.\rightarrow.$	$\sim q$	$\vee$	r
V	V	V	F	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F	F	F
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	F

Por lo tanto, los valores de verdad de la proposición A so[n] VVVVVFVV.

Hallar la negación de las siguientes afirmaciones:

8. «Todos los animales respiran por la nariz».

Solución:

«Algunos animales no respiran por la nariz».

9. «Ningún hombre ha llegado a la Luna».

Solución:

«Algunos hombres han llegado a la Luna».

10. «Algunos cisnes son negros».

Solución:

«Ningún cisne es negro».

11. «Algunos pájaros no saben volar».

Solución:

«Todos los pájaros saben volar».

ENUNCIADO:

¿Cuál afirmación se puede concluir de...?

12. «Los chanchos son animales que vuelan. Ningún animal que vue[la] tiene cola».

Solución:

«Ningún chancho tiene cola».

13. «Todas las aves tienen plumas. Algunos bípedos son aves».

Solución:

«Algunos bípedos tienen plumas».

ENUNCIADO:

Indique si se trata de una tautología, una contradicción o u[na] contingencia.

14. «Si vas al hipódromo, pierdes tu dinero. Si no vas al hipódrom[o] vas al cine. No fuiste al cine».

Solución:

«Perdiste tu dinero».

Se trata, por tanto, de una proposición contingente.

Ejercicios propuestos

Simbolice las siguientes proposiciones y construya su tabla de verdad. Además, indique de qué clase de proposiciones se trata.

1. «Existen 9 planetas en el sistema solar, aunque tal vez haya otros más».

   R. $p \wedge q$

2. «Si Joaquín toma su sopa, entonces su madre estará contenta, ya que a ella le interesa la alimentación de su hijo».

   R. $p \rightarrow (r \rightarrow q)$

3. «Si llegas tarde a la clase o faltas o te retiras antes de que termine el profesor, o bien te retiras del curso o bien te desaprueba o reporta tu caso a las autoridades».

   R. $\sim(p \vee q \vee r) \rightarrow (s \vee t \vee u)$

4. «No es cierto que si María Luisa se baña, entonces estuvo sucia».

   R. $\sim(p \rightarrow q)$

5. «Si no es cierto que Joaquín ha perdido sus zapatos o su chompa, entonces podremos regresar temprano del paseo».

   R. $\sim(p \wedge q) \rightarrow r$

6. «No es cierto que los leones sean violentos o amargados, pues andan durmiendo todo el día».

   R. $r \rightarrow \sim(p \vee \sim q)$

7. «O bien los lunes comemos pizza y, por ende, salimos de paseo, o bien nos quedamos en casa y, en consecuencia, vemos una película».

   R. $(p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow s)$

8. «El trabajo debe hacerse inteligentemente, sabiamente y relajadamente, y no ansiosamente o negligentemente».

   R. $(p \wedge q \wedge r) \wedge \sim(s \vee t)$

Hallar la negación de las siguientes afirmaciones:

9. «Todos los días me levanto temprano».

10. «Ningún gato ha conseguido hablar».

11. «Algunos hombres se acuestan temprano».

12. «Algunos niños no saben nadar».

13. «Todos los espejos reflejan la luz».

14. «Ningún perro come pescado».

15. «Algunos cerdos pueden volar».

16. «Algunos hombres no fueron a la escuela».

17. ¿Qué conclusión se puede obtener de «Los miércoles voy al cin
Cuando voy al cine, nunca como queso. Hoy comí queso»?

18. ¿Qué conclusión se puede obtener de «Cuando engordo, me sient
feliz. Si estoy feliz, voy al parque. Hoy no fui al parque»?

Capítulo 5
CONJUNTOS

5.1 Definiciones

A pesar de no existir un acuerdo entre los especialistas para la definición de conjunto, en este curso llamaremos conjunto a una colección bien definida de objetos. A los objetos que pertenecen a un conjunto los llamamos elementos. Así, para que una colección cualquiera sea denominada conjunto, debemos tener un criterio claro de cuáles son sus elementos.

Intente formular otra definición para el concepto de conjunto.

5.2 Nomenclatura

Para nombrar a los conjuntos, emplearemos frecuentemente letras mayúsculas (A, B, C, etc.).

Si queremos señalar que un determinado elemento pertenece a un conjunto, usaremos el símbolo $\in$, y si queremos señalar que no pertenece, usaremos el símbolo $\notin$.

Así, si queremos decir que *el elemento 1 pertenece al conjunto A*, escribiremos simplemente:

$$1 \in A$$

Y si queremos decir que *el elemento 5 no pertenece al conjunto A*, escribiremos simplemente:

$$5 \notin A$$

5.3 Determinación de conjuntos

Los conjuntos pueden determinarse por extensión, por comprensión o, gráficamente, mediante un diagrama de Venn.

5.3.1 Determinación de conjuntos por extensión

Se encierra entre llaves { } a los elementos que conforman el conjunto, separándolos con punto y coma.

Así, por ejemplo, tenemos:

$$A = \{3; 4; 5; 6\}$$

5.3.2 Determinación de conjuntos por comprensión

Se encierra entre llaves { } la propiedad que comparten lo elementos del conjunto y que determina su pertenencia al mismo.

En el ejemplo anterior, tenemos:

A = {Números naturales mayores que 2 y menores que 7}

En este ejemplo, vemos que para que un número pertenezca a conjunto A, debe cumplir los siguientes criterios:

- Debe ser un número natural.
- Debe ser mayor que 2.
- Debe ser menor que 7.

Este conjunto también puede ser expresado por comprensión d la siguiente manera.

$$A = \{x \in \mathbb{N} / 2 < x < 7\}$$

El símbolo / se puede leer como *de tal manera que*; así, la fórmul anterior significa:

x pertenece al conjunto de los números naturales, de tal manera que x es may que 2 y menor que 7.

En el primer caso, pertenecen al conjunto A los números naturales entre 2 y 7; en el segundo caso, se expresa lo mismo, pero con los números naturales que comprenden desde 3 hasta 6.

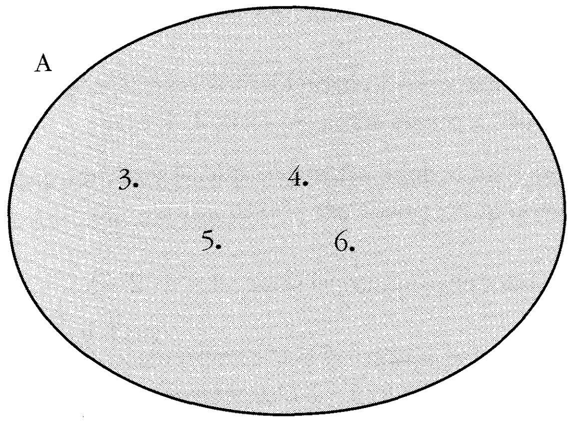
Nota: en algunos casos, es posible expresar un mismo conjunto po comprensión de dos maneras diferentes. Por ejemplo, el conjunto A pued ser expresado también como

$$A = \{x \in \mathbb{N} / 3 \leq x \leq 6\}$$

5.3.3 Determinación de conjuntos gráficamente, mediante e Diagrama de Venn

Esta es la forma tradicional de expresar los conjuntos y, en much casos, la más sencilla. Debemos rodear con una curva cerrada los símbol que representan a los elementos del conjunto.

Tomando el ejemplo anterior, tenemos:



Ejemplos:

1. Determine en cada caso el conjunto A por extensión.

a. $A = \{x \in \mathbb{N} / 5 < x \leq 16\}$

Solución:

x es un número natural, así que puede ser 0; 1; 2; 3...

Tiene que ser mayor que 5 (lo cual indica que el 5 no pertenece al conjunto A) y menor o igual que 16 (lo cual indica que el 16 sí pertenece al conjunto A), con lo que nos queda que x puede ser 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15 o 16.

Por lo tanto, el conjunto A será:

$$A = \{6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16\}$$

b. $A = \{x \in \mathbb{Z} / -3 \leq x \leq 1\}$

Solución:

x es un número entero, así que puede ser ...-2, -1, 0, 1, 2...

Tiene que ser mayor o igual que -3 (lo cual indica que el -3 sí pertenece al conjunto A) y menor que 1 (lo cual indica que 1 no pertenece al conjunto A), con lo que nos queda que x puede ser -3, -2, -1 o 0.

Por lo tanto, el conjunto A será:

$$A = \{-3; -2; -1; 0\}$$

c. $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{x}{2} \in \mathbb{Z}, -4 < x < 1 \right\}$

Solución:

Si $\frac{x}{2} \in \mathbb{Z}$, entonces x tiene que ser un número múltiplo de 2 (de

tal manera que cuando lo dividamos entre 2, nos quede un número exacto); así, x puede ser ... -4; -2; 0; 2; 4; 6...

Pero, además, x debe ser mayor que -4 y menor que 1, con lo que nos queda que x puede ser -2 o 0.

Por lo tanto, el conjunto A será: $A = \{-2; 0\}$

2. Determine el conjunto A por comprensión (recuerde que, según lo visto en el apartado 5.3.2 *Determinación de conjuntos por comprensión*, hay varias maneras posibles).

a. $A = \{5; 6; 7; 8\}$

Solución:

En estos casos, hallamos una posible solución, pues existen varias posibilidades.

Vemos que los elementos del conjunto A son números enteros (o, más precisamente, son naturales) que comprenden desde el 5 hasta el 8; por lo tanto, una posible solución es:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / 4 < x < 9\}$$

Nota: observe que en este caso en particular da lo mismo poner

$$x \in \mathbb{Z} \text{ o } x \in \mathbb{N}$$

b. $A = \{3; 6; 9; 12\}$

Solución:

Vemos que los elementos de A son números enteros (más precisamente, son naturales) y múltiplos de 3. Si x representa a los elementos del conjunto A, entonces $\frac{x}{3}$ debe ser un número entero.

Además, x está entre 3 y 12; por lo tanto, una posible solución sería

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{x}{3} \in \mathbb{Z}, 2 < x < 13 \right\}.$$

Nota: observe que en este caso en particular da lo mismo poner

$$x \in \mathbb{Z} \text{ o } x \in \mathbb{N}$$

c. $A = \{-12; -8; -4; 0\}$

Solución:

Vemos que los elementos del conjunto A son enteros y múltiplos de 4. Si x representa a los elementos del conjunto A, entonces debe ser un número entero. Además, x está entre -12 y 0; por lo tanto, una posible solución sería

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}, -13 < x < 1 \right\}$$

Nota: observe que en este caso es necesario poner $x \in \mathbb{Z}$ porque algunos valores de x son negativos.

5.4 Subconjuntos

5.4.1 Definición

Si todos los elementos de un conjunto A pertenecen a un conjunto B, se dice que A es un subconjunto de B.

Si A es un subconjunto de B, entonces A *está incluido* en B. Esta relación se simboliza con el signo $\subset$. De la misma forma, si queremos decir que C no está incluido en B, usamos el signo $\not\subset$.

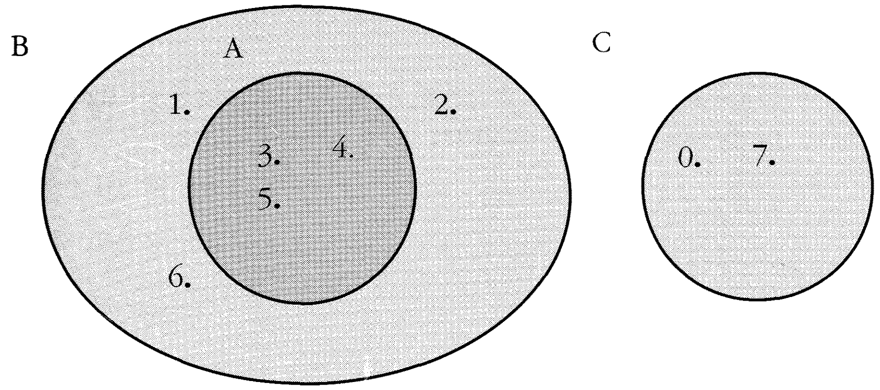
Así, por ejemplo, si $A = \{3; 4; 5\}$; $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; $C = \{0; 7\}$

Recuerde:

Un elemento *pertenece* ($\in$) a un conjunto, mientras que un subconjunto *está incluido* ($\subset$) en un conjunto.

$3 \in A$

$A \subset B$



Vemos que A está incluido en B (A es un subconjunto de B) y que C no está incluido en B (C no es un subconjunto de B).

Simbólicamente, decimos que

$$A \subset B$$
$$C \not\subset B$$

5.4.2 Propiedades

a) Si $A \subset B$ y $B \subset A$, entonces $A = B$ (A y B representan al mismo conjunto).

El conjunto vacío puede representarse tambien así:

{ }

b) Si ϕ representa al conjunto vacío (el conjunto que no tie elementos), podemos decir lo siguiente: para cualquier conju A, $\phi \subset A$.

5.4.3 Conjunto potencia P(A)

El conjunto potencia de A es el conjunto de todos los subconjunt de A.

Así, por ejemplo, si $A = \{3; 4; 5\}$,

todos los subconjuntos posibles de A serán:
$\{3\}, \{4\}, \{5\}, \{3; 4\}, \{3; 5\}, \{4; 5\}, \{3; 4; 5\}$ y ϕ

(Recuerde que ϕ es subconjunto de cualquier conjunto).

El conjunto potencia de A será:
$P(A) = \{\{3\}; \{4\}; \{5\}; \{3; 4\}; \{3; 5\}; \{4; 5\}; \{3; 4; 5\}; \phi\}$

Nota: si n es el número de elementos de A, el número de subconjunt de A será siempre 2^n.

En el ejemplo anterior, $n = 3$ (es decir, el conjunto A tiene elementos); por lo tanto, tendrá $2^3 = 8$ subconjuntos.

Ejemplos:

1. Dado el conjunto $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$, señale si las siguient proposiciones son verdaderas (V) o falsas (F).

I. $2 \subset$ A.
II. $\{2\} \subset$ A.
III. $\{6; 8\} \in$ A.
IV. A tiene 5 subconjuntos.

Solución:

I. Falso. 2 es un elemento de A, por lo tanto, no está incluid sino que pertenece a A ($2 \in$ A).
II. Verdadero. $\{2\}$ es un subconjunto de A porque todos s elementos (el 2) son elementos de A.
III. Falso. $\{6; 8\}$ es un subconjunto de A; por lo tanto, no pertene a A, sino que está incluido en A ($\{6; 8\} \subset A$).
IV. Falso. A tiene 5 elementos; por lo tanto, tiene $2^5 = 32$ su conjuntos.

Respuesta: FVFF

2. Dado el conjunto $A = \{x \subset \mathbb{N} / 2 < x < 7\}$, señale si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

I. $\{4\} \subset A$.
II. $P(A)$ tiene 16 elementos.
III. $\phi \in A$.
IV. $\{3; 4; 5; 6\} \subset A$.

Solución:

Por extensión, tenemos que $A = \{3; 4; 5; 6\}$.

I. Verdadero. $\{4\}$ es un subconjunto de A porque todos sus elementos (el 4) pertenecen a A.
II. Verdadero. A tiene 4 elementos; por lo tanto, tiene $2^4 = 16$ subconjuntos. Entonces, el conjunto potencia de A (el conjunto de los subconjuntos de A) tiene también 16 elementos.
III. Falso. El conjunto vacío es un subconjunto de A; por lo tanto, no pertenece, sino que está incluido en A. ($\phi \subset A$).
IV. Verdadero. Todo conjunto es subconjunto de sí mismo; por lo tanto, está incluido en sí mismo.
Respuesta: VVFV

3. Dado el conjunto $A = \{x \in Q / 1 < x < 4\}$, señale si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

I. Si $F = \left\{\frac{4}{3}; \frac{23}{8}\right\}$; entonces, $F \subset A$.

II. Si $\left\{\frac{17}{4}\right\}$; entonces, $G \subset A$.

III. Si $B = \{x \in \mathbb{Q} / 1 \leq x \leq 4\}$, entonces, $B \subset A$.

IV. Si $B = \{x \in \mathbb{Q} / 1 \leq x \leq 4\}$, entonces, $A \subset B$.

Solución:

I. Verdadero.

1 equivale a $\frac{3}{3}$, y 4 equivale a $\frac{12}{3}$. Por lo tanto, se cumple que $\frac{3}{3} < \frac{4}{3} < \frac{12}{3}$. Debido a que el elemento $\frac{4}{3}$ es mayor que 1 y menor que 4, pertenece al conjunto A.

1 equivale a $\frac{8}{8}$ y 4 equivale a $\frac{32}{8}$. Por lo tanto, se cumple que $\frac{8}{8} < \frac{23}{8} < \frac{32}{8}$. Debido a que el elemento $\frac{23}{8}$ es mayor que 1 y menor que 4, pertenece al conjunto A.
Como ambos elementos de F pertenecen a A, es verdadero que $F \subset A$.

II. Falso

4 equivale a $\frac{16}{4}$ y se cumple que $\frac{16}{4} < \frac{17}{4}$. Debido a que $\frac{17}{4}$

es mayor que 4, no pertenece al conjunto A. Como el elemen de G no pertenece a A, es falso que $G \subset A$.

III. Falso.
El conjunto A no contiene a los elementos 1 y 4. Dado que conjunto B sí los contiene, es falso decir que B está contenid en A porque no todos sus elementos pertenecen a A.

IV. Verdadero.
El conjunto B contiene a todos los elementos del conjunto y, además, contiene al 1 y al 4; por lo tanto, es verdadero dec que A está incluido en B.

Respuesta: VFFV

Ejercicios resueltos

Recuerde:

Las relaciones de inclusión y pertenencia estudiadas en esta unidad y las de las fórmulas algebraicas vistas en la unidad anterior.

1. Determine el conjunto A por extensión.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \sqrt{x+1} \in \mathbb{R}, x < 10 \right\}$$

Solución:

Si $\sqrt{x+1} \in \mathbb{R}$ entonces $x + 1$ debe ser positivo, pues la ra cuadrada de números negativos no es un número real. Por lo tant x debe ser mayor o igual que -1.

Además, sabemos que x es un número entero ($\mathbb{Z}$) y que es men que 10, con lo que nos queda que x puede ser -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 7; 8 o 9.

Por lo tanto, el conjunto A será:

$$A = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

2. Determine el conjunto A por extensión.

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N} / x^2 = 4 \right\}$$

Solución:

Los dos únicos números que al ser elevados al cuadrado dan 4 s -2 y 2, ya que
$(-2)^2 = 4$;
$(2^2) = 4$

x podría ser -2 o 2, pero como $x \in \mathbb{N}$, entonces solamente pue ser 2.

Por lo tanto, el conjunto A será:
$A = \{2\}$

3. Determine el conjunto A por extensión.

$$A=\left\{ x \in \mathbb{N} / \frac{12}{x} \in \mathbb{N} \right\}$$

Solución:

Si $\frac{12}{x} \in \mathbb{Z}$ entonces x debe ser un divisor de 12 (es decir, un número que contenga una cantidad exacta de veces en 12).
x puede ser 1; 2; 3; 4; 6 o 12

Por lo tanto, el conjunto A será:

$$A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

4. Determine el conjunto A por comprensión.

$$A = \{8\}$$

Solución 1:

En este caso, la manera más sencilla sería:

$$A=\{x \in \mathbb{N} / 7 < x < 9\}$$

Solución 2:

También podemos expresar este conjunto mediante una ecuación cualquiera:

$$A=\{x \in \mathbb{R} / x+5=13\}$$

5. Determine el conjunto A por extensión.

$$A=\{x \in \mathbb{R} / 2x+15=27\}$$

Solución:

Tenemos que resolver la ecuación $2x + 15 = 27$

$$2x + 15 = 27$$

$$2x + 15 - 15 = 27 - 15 \quad \text{Restamos 15 a cada miembro.}$$

$$2x = 12$$

$$\frac{2x}{2}=\frac{12}{2} \quad \text{Dividimos cada miembro entre 2.}$$

$$x = 6$$

Por lo tanto, el conjunto A será:
$A = \{6\}$

6. Determine el conjunto A por extensión.

$$A=\left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{12}{x-3}=4 \right\}$$

Solución

Para comenzar, sabemos que x - 3 no puede ser cero, pues no s puede dividir ningún número entre cero (en otras palabras, $\frac{12}{0}$ n existe). Por lo tanto, x no puede ser 3.

Ahora tenemos que resolver la ecuación $\frac{12}{x-3}=4$

$$\frac{12}{x-3}=4$$

$$\frac{12}{x-3}\bullet(x-3)=4\bullet(x-3)$$

$12 = 4\bullet(x-3)$	Aplicamos la propiedad distributiva.
$12 = 4x - 12$	
$12 + 12 = 4x - 12 + 12$	Sumamos 12 a cada miembro.
$24x = 4x$	Dividimos cada miembro entre 4.
$\frac{24}{4}=\frac{4x}{4}$	
$6 = x$	

Por lo tanto, el conjunto A será:

$A = \{6\}$

Nota: al inicio de este ejercicio, determinamos que $x \neq 3$. A este dat se le llama *restricción* y sirve para verificar la validez de la solució que obtuvimos en la ecuación. En el capítulo de ecuaciones inecuaciones veremos esto más detalladamente.

7. Determine el conjunto A por comprensión.

$A = \{6; 11; 16; 21; 26\}$

Solución:

Vemos que los elementos del conjunto A comienzan en 6 y va aumentando de 5 en 5. Eso quiere decir que si a cada elemento l restamos 6, obtendremos un múltiplo de 5. Si x representa a lo elementos del conjunto A, entonces $\frac{x-6}{5}$ debe ser exacto.

Además, x es mayor o igual que 6 y menor o igual que 26; por l tanto, una posible solución es:

$$A=\left\{\ x\in\mathbb{R}/,\frac{x-6}{5}\in\mathbb{Z};5\leq x\leq 27\right\}$$

8. Si el siguiente conjunto se encuentra dentro de los númer enteros:

$$B=\left\{\frac{3x-1}{4}\ /\ 1<\sqrt{x}<3,x\in\mathbb{N}\right\}$$

Determinar el conjunto B por extensión.

Solución:

$1 < \sqrt{x} < 3$ elevamos todo al cuadrado.

$1 < x < 9$

Pero el conjunto B está determinado por los valores de $\frac{3x-1}{4}$.

Ahora reemplazamos el valor de x en $\frac{3x-1}{4}$.

$\frac{3(2)-1}{4} = 5/4$

$\frac{3(3)-1}{4} = 2$

$\frac{3(4)-1}{4} = 11/4$

$\frac{3(5)-1}{4} = 14/4$

$\frac{3(6)-1}{4} = 17/4$

$\frac{3(7)-1}{4} = 5$

$\frac{3(8)-1}{4} = 23/4$

Entonces $B = \{5/4, 2, 11/4, 7/2, 17/4, 5, 23/4\}$.

En algunos ejercicios, tiene que aplicar ecuaciones. Si tiene dificultades, consulte el capítulo 8, referente a las ecuaciones.

9. Si los conjuntos A y B son iguales:

$A = \{a + b; a + 2b - 3; 12\}$, calcular $a^2 + b^2$

$A = \{a^2 + 1); (b - a); 2\}$, $B = \{-2; (a + b); 5\}$, donde a y $b \in \mathbb{N}$, entonces, calcula $2b + a^2$.

Solución:

Dado que los conjuntos son iguales, es lógico pensar que
$2 = a + b$.. (I)

Además, nos percatamos de que no existe un número en $\mathbb{Z}$ que satisfaga la relación $(a^2 + 1) = 6$, por lo que se deduce que $(a^2 + 1) = 5$, resolviendo la ecuación $(a^2 + 1) = 5 \Rightarrow a^2 = 4$
$\Rightarrow a = 2$

Ahora reemplazamos el valor de a en..(I)
$2 = 2 + b \Rightarrow b = 0$

Así, el valor de $2b + a^2 = 0 + 4 = 4$.

10. Determine por comprensión el conjunto de los números natural impares cuyos cuadrados divididos entre 2 son menores q 100.

Solución:

Los número impares son expresados de la siguiente forma:

(2n - 1), siendo n = {1; 2; 3; 4; 5 ...}

Entonces, tenemos la expresión de la forma $\frac{(2n-1)^2}{2} < 100$

Ahora, sea el conjunto A el conjunto deseado. Este estará dado como $A = \left\{ x \,/\, x \in \mathbb{N}, x = \frac{(2n-1)^2}{2} < 100, n \in \mathbb{N} \right\}$.

11. Señalar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F)

I. $\varnothing = 0$

II. $2 \in \{3; 4; 2\}$

III. $\{3; 4\} \subset \{1; 2\}$

IV. $\{1; 2\} \in \{1; 2; 3\}$

V. $\{2\} \in \{\{2\}; 3\}$

VI. $\{1; \{2\}\} \subset \{1; \{2\}; 3\}$

Solución:

I. $\varnothing = 0$ ....(F)
Porque el vacío representa que no hay elementos dentro de conjunto (conjunto nulo), y 0 es un elemento.

II. $2 \in \{3; 4; 2\}$ ....(V)
Ya que 2 es un elemento del conjunto $\{3; 4; 2\}$.

III. $\{3; 4\} \subset \{1; 2\}$ ....(F)
Ya que 3 y 4 no son elementos del conjunto $\{1; 2\}$, $\{3; 4\}$ no puede ser subconjunto de $\{1; 2\}$.

IV. $\{1; 2\} \in \{1; 2; 3\}$ ....(V)
Ya que 1 y 2 son elementos del conjunto $\{1; 2; 3\}$, pueden formar el subconjunto $\{1; 2\}$.

V. $\{2\} \in \{\{2\}; 3\}$ ....(V)
Porque $\{2\}$ es un elemento del conjunto $\{\{2\}; 3\}$.

VI. $\{1; \{2\}\} \subset \{1; \{2\}; 3\}$ ....(V)
Porque 1 y $\{2\}$ son elementos del conjunto $\{1; \{2\}; 3\}$, $\{1; \{2\}\}$ es un subconjunto de $\{1; \{2\}; 3\}$.

Recuerde que para pasar esta sección debe haber resuelto los ejercicios anteriores y haber comprendido la teoría.

Ejercicios propuestos

1. Determine el conjunto A por comprensión.

$A = \{1; 3; 5; 15\}$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N} \ / \ \frac{15}{x} \subset \mathbb{Z} \right\}.$$

Nota: observe que en este caso es necesario establecer que $x \in \mathbb{N}$ porque, de lo contrario, estaríamos admitiendo posibles valores negativos para x.

2. Determine el conjunto A por comprensión.

$A = \{0; 1; 4; 9; 16\}$

R. $A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \sqrt{x} \in \mathbb{Z}, x \leq 16 \right\}$

3. ¿A cuál intervalo es equivalente el conjunto A?

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / 3(x,2) \in \left[-12,9\right] \right\}$$

R. [-2, 5]

4. Dado el conjunto unitario:

$A = \{a + b; a + 2b - 3; 12\}$, calcular $a^2 + b^2$

R. 90

5. Determinar el conjunto $A = \{B \cap C\}$

$$B = \left\{ x / x\mathbb{R}, \sqrt{\frac{x+3}{2}} = 1 \right\} \quad y \quad C = \left\{ x / x \in \mathbb{Z}, -5 < x < 5 \right\}$$

R. $\{-1\}$

6. Dados los conjuntos A y B:

$A = \{x \ / \ x \in$ conjunto de números primos $\leq 21\}$

$B = \{x \ / \ x \in A \wedge x$ es divisor de $12\}$

Determinar $A \cap B$.

R. $\{2, 3\}$

7. ¿Cuántos subconjuntos tiene M?

$M = \{1; \{1\}; 2; \{2\}; 3; \{3\}\}$

R. 64

Recuerde que $\dot{a}$ significa múltiplo de a. Es decir,
$\dot{2} = 0, 2, 4, 6...$
$\dot{3} = 0, 3, 6, 9...$

8. Si $A = \{x \in \mathbb{N} / x = \dot{2} \wedge x < 20\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} / x = \dot{3} \wedge x < 20\}$, hallar cuántos subconjun

tiene $A \cap B$.

R. 16

9. El conjunto A tiene dos elementos menos que B, que posee 3 subconjuntos más que A. Si tales conjuntos son disjuntos, hallar cardinal de $(A \cup B)$.

R. 22

10. ¿Cuántos subconjuntos tiene el conjunto A?

$A = \{\{3\}; \{3; 3\}; \{\phi\}; \{\phi; \phi\}; \{\phi; \phi; \phi\}\}$

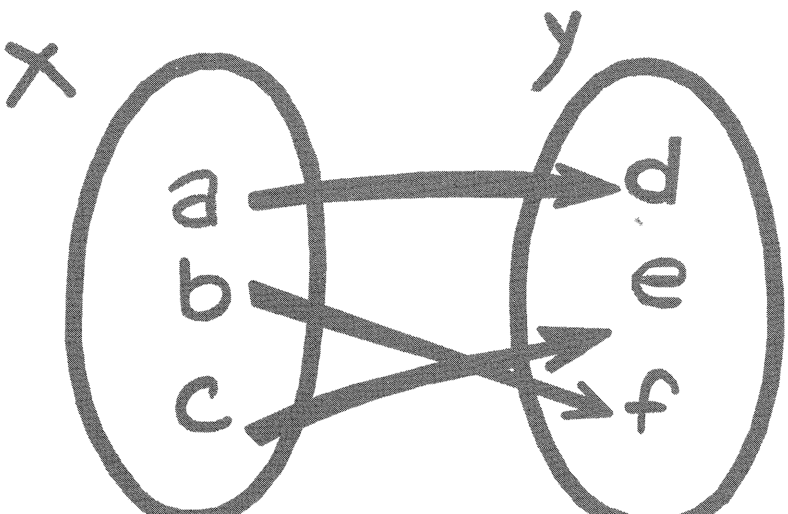
R. 32

11. Dado el conjunto unitario:

$A = \{a^2 + b^2 + 4^2; b^2 + c^2; a^2 + c^2 + 7; 41\}$

Calcular $a + b + c$; $a, b, c > 0$.

R. 12

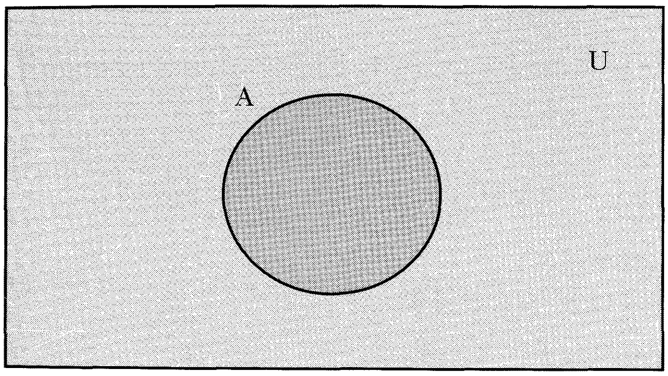


Capítulo 6
OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

En este capítulo, estudiaremos cuatro operaciones: unión, intersección, diferencia y complemento.

Para poder definir estas operaciones, vamos a considerar la existencia de un conjunto que incluya a todos los conjuntos. Lo llamaremos conjunto universal. Así, se cumple lo siguiente para cualquier conjunto A:

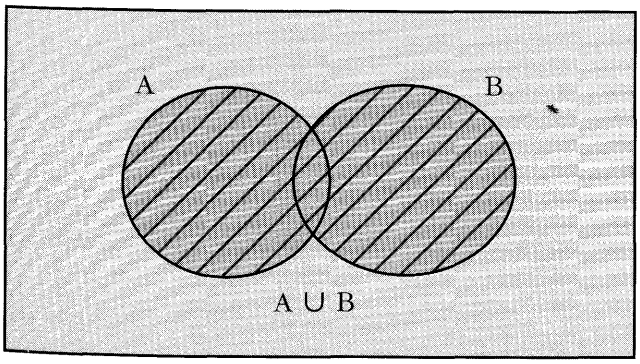
$$A \subset U$$



6.1 Unión (∪)

6.1.1 Definición

Dados dos conjuntos A y B, decimos que $A \cup B$ es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y a B.



Si el conjunto A tiene n_a elementos y el conjunto B tiene elementos, no podemos asegurar que $A \cup B$ tendrá $n_a + n_b$ element pues los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B se deb considerar sólo una vez.

6.1.2 Propiedades

> Trate de demostrar gráficamente cada una de las propiedades de la derecha.

a. $A \subset (A \cup B)$; $B \subset (A \cup B)$
b. Si $A \subset C$ y $B \subset C$, se cumple que $(A \cup B) \subset C$
c. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
d. $A \cup B = B \cup A$
e. $A \cup \phi = A$
f. $A \cup A = A$

Ejemplos

1. Demostrar que $A \cup A = A$.

Solución:

Empleamos para esto los conjuntos A y B, que son iguales.
$A = \{1; 2; 3; 4;.....\}$
Por lo tanto, determinando B por extensión, tenemos:
$B = \{1; 2; 3; 4;.....\} = A$
$B = \left\{ x / x \in \mathbb{Z}^+ \right\}$
Además,
$\Rightarrow A \cup B = \{1; 2; 3; 4;.....\}$
Pero $A \cup B = A = B$.
Por lo tanto, $A \cup A = A$

2. Demostrar $A \cup \phi = A$.

Solución:

Siendo B un conjunto vacío y $A = \{1\}$,
$\Rightarrow B = \{\ \}$
$A = \{1\}$
$A \cup B = \{1\} = A$
Por lo tanto, $A \cup \phi = A$.

3. Demostrar $A \cup B = B \cup A$.

Solución:

Siendo A y B conjuntos no nulos,
$A = \{1\}$
$B = \{2\}$
$\Rightarrow A \cup B = \{1; 2\}$

También $B \cup A = \{2; 1\} = \{1; 2\}$.
$B \cup A = \{1; 2\} = A \cup B$
Por lo tanto, $A \cup B = B \cup A$.

4. Demostrar $(A \cup B) \subset C$.

Solución:

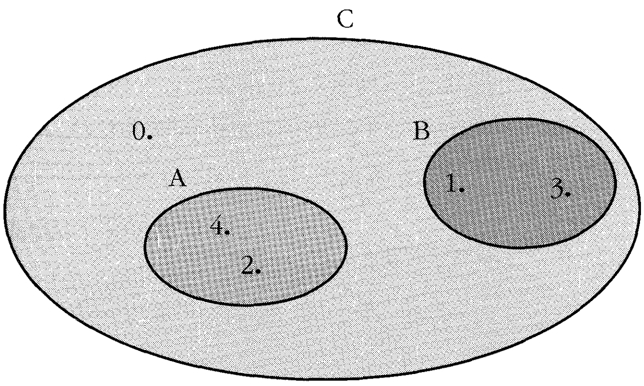
Siendo los conjuntos no nulos:

$A = \{2;4;6;8;...\}$; $B = \{1;3;5;...\}$; $C = \{x \,/\, x \in \mathbb{Z}^+\}$

Por lo tanto,

$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5;...\}$

$\Rightarrow\ A \cup B = \{x \,/\, x \in \mathbb{Z}^+\}$ y $C = \{x \,/\, x \in \mathbb{Z}^+\}$

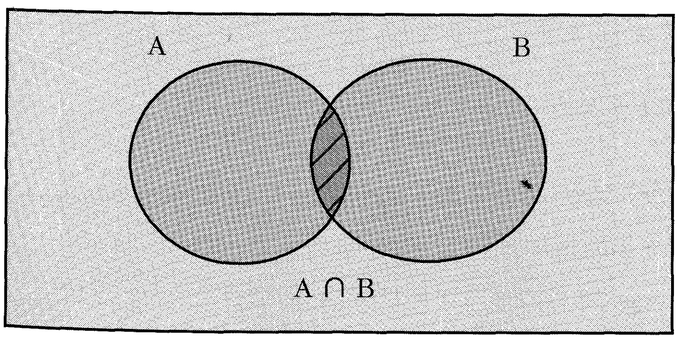


Por observación, tenemos $\Rightarrow (A \cap B) \subset C$.

6.2 Intersección ($\cap$)

6.2.1 Definición

Dados dos conjuntos A y B, decimos que $A \cap B$ es el conjunto formado por todos los elementos comunes de dichos conjuntos.



A los conjuntos cuya intersección es un conjunto vacío se les llama conjuntos disjuntos.

Trate de demostrar gráficamente cada una de las propiedades de la derecha.

6.2.2 Propiedades

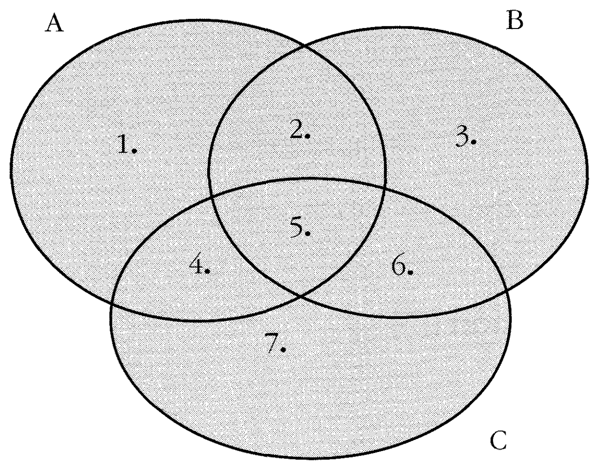
a. $(A \cap B) \subset A$; $(A \cap B) \subset B$
b. Si $C \subset A$ y $C \subset B$, se cumple que $C \subset A \cap B$
c. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
y, en general, podemos decir que
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
d. $A \cap B = B \cap A$
e. $A \cap U = A$
f. $A \cap A = A$
a. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
b. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Ejemplos

1. Demostrar que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Solución:

Empleamos diagramas de Venn y definimos A, B y C com conjuntos no nulos



Se definen por extensión:
$A = \{1; 2; 4; 5\}$; $B = \{2, 3; 5; 6\}$; $C = \{4; 5; 6; 7\}$

Entonces $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
$A \cup B = \{1; 2; 4; 5; 6; 7\}$

Por lo tanto $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1; 2; 4; 5; 6$ .... (I)

Por otro lado $B \cup C = \{5; 6\}$

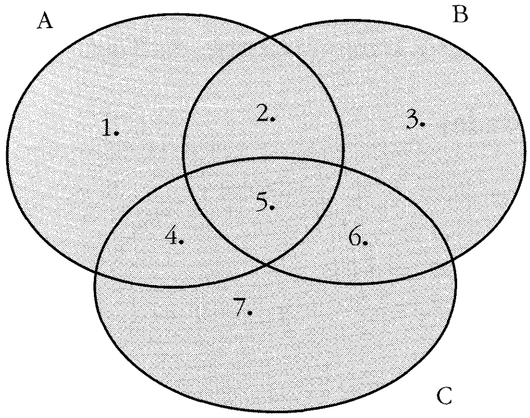
Luego $A \cup (B \cap C) = \{1; 2; 4; 5; 6\}$ .... (II)
(I) = (II)

Se concluye, a partir el ejemplo que:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)$

2. Demostrar que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Solución:

Empleamos los diagramas de Venn:



Definimos $A = \{1; 2; 4; 5\}$; $B=\{2, 3; 5; 6\}$; $C = \{4; 5; 6; 7\}$

Entonces $B \cup C = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Por lo tanto, $A \cap (B \cup C) = \{2; 4; 5\}$ .... (I)

Además $(A \cap B) = \{2; 5\}$.

Y también $(A \cap C) = \{4; 5\}$.

$(A \cap B)\ (A \cap C) = \{2; 4; 5\}$ .... (II)

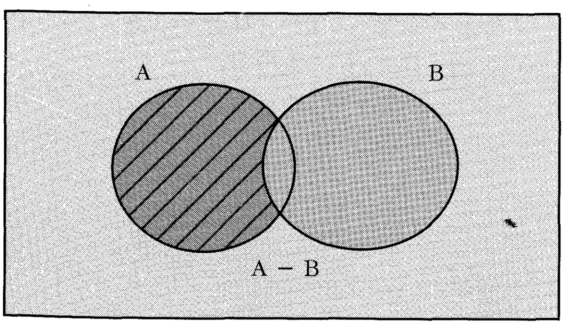
De (I) = (II) concluimos que

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

6.3 Diferencia

6.3.1 Definición

Dados dos conjuntos A y B, decimos que $A - B$ es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A, pero que no pertenecen a B.



Observe detenidamente el gráfico y se dará cuenta de que $A - B$ es lo mismo que $A - A \cap B$, pues al conjunto A debemos quitarle solamente los elementos que tiene en común con B.

Si el conjunto A tiene n_a elementos y el conjunto B tiene elementos, no podemos asegurar que A - B tendrá n_a - n_b elementos, pu sólo debemos restar los elementos que pertenecen simultáneamente a A a B.

En este caso, el orden en que aparecen los conjuntos determina resultado. Es decir, no es lo mismo escribir A - B que B - A.

6.3.2 Propiedades

Trate de demostrar gráficamente cada una de las propiedades de la derecha.

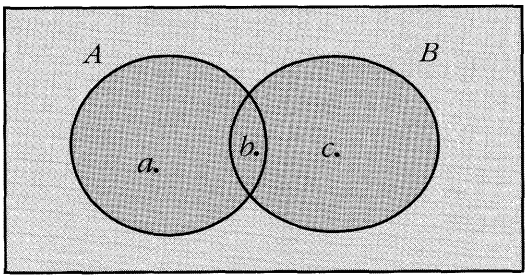
a. $A - \phi = A$
b. $A - A = \phi$
c. $A - B = A - A \cap B$
d. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

Ejemplos

1. Demostrar que $A - B = A - (A \cap B)$.

Solución:

Siendo A y B conjuntos no nulos, por el diagrama de Ve tenemos:



A = {c; d}
B = {b; c}

$\Rightarrow A - B = \{c\}$
$A - (A \cap B) = \{a; b\} - \{b\} = \{a\} = A - B$
Por lo tanto, $A - B = A - (A \cap B)$.

2. Demostrar que $A - A = \phi$.

Solución:

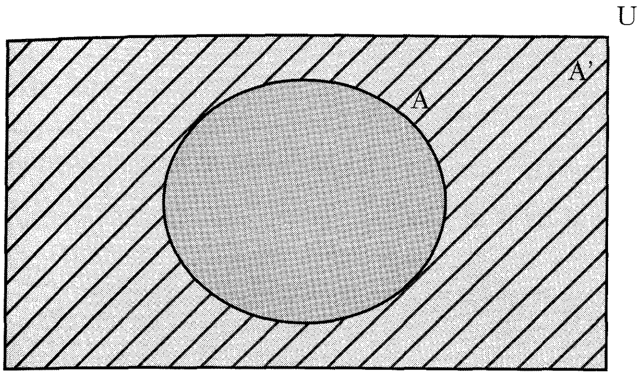
Sea un conjunto A cualquiera.

Al quitarle a ese conjunto A todos sus elementos, ¿cuánt elementos quedarán? Ninguno. Por lo tanto, de la resta de A c A obtenemos un conjunto que carece de elementos, es decir, conjunto vacío.

6.4 Complemento

6.4.1 Definición

Dado el conjunto A, se define el complemento de A (A') como el conjunto de todos los elementos del conjunto universal que no pertenecen a A.



Otra manera de expresar el complemento de A, es utilizando el símbolo $\overline{A}$:

$$A' = \overline{A}$$

Observe detenidamente el gráfico y se dará cuenta de que A' es lo mismo que $U - A$, pues al conjunto U debemos quitarle los elementos del conjunto A.

6.4.2 Propiedades

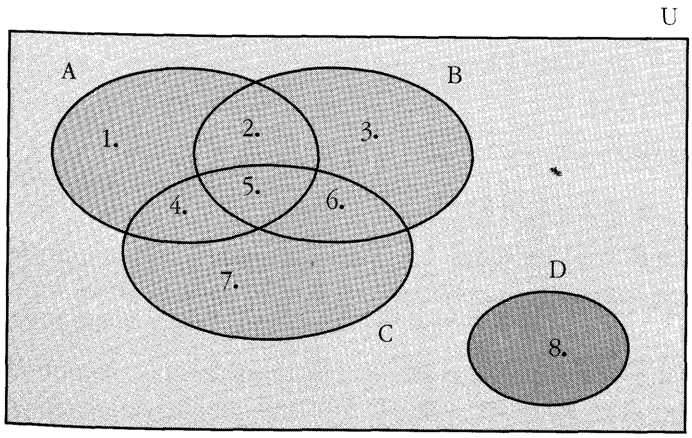
a. $(A')' = A$
b. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
c. $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Ejemplos:

1. Demostrar que $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

Solución:

Sean los conjuntos A, B, C y D



$A = \{1; 2; 4; 5\}$

$B = \{2; 3; 5; 6\}$

$C = \{4; 5; 6; 7\}$

$D = \{8\}$

$\Rightarrow A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$(A \cup B)' = \{7; 8\}$ .... (I)

$\Rightarrow A' = \{3; 6; 7; 8\}$

$B' = \{1; 4; 7; 8\}$

$(A' \cup B)' = \{7; 8\}$ .... (II)

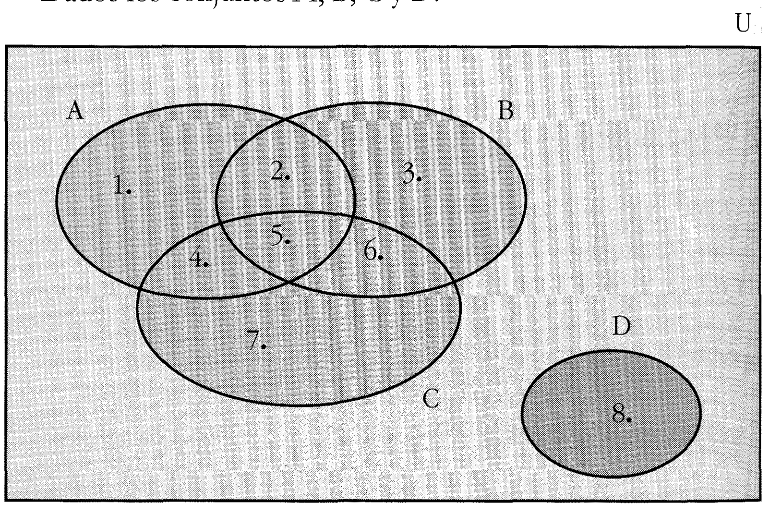
$\Rightarrow$ (I) = (II)

$\Rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$

2. Demostrar que $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Solución:

Dados los conjuntos A, B, C y D:



$A = \{1; 2; 4; 5\}$

$B = \{2; 3; 5; 6\}$

$C = \{4; 5; 6; 7\}$

$D = \{8\}$

$\Rightarrow A \cap B = \{2; 5\} \Rightarrow (A \cap B)' = \{1; 3; 6; 7; 8\}$ .... (I)

$A' = \{3; 6; 7; 8\}$

$B' = \{1; 4; 7; 8\}$

$A' \cup B' = \{1; 3; 4; 6; 7; 8\}$ .... (I

(I) = (II)

$\Rightarrow (A \cap B)' = A' \cup B'$

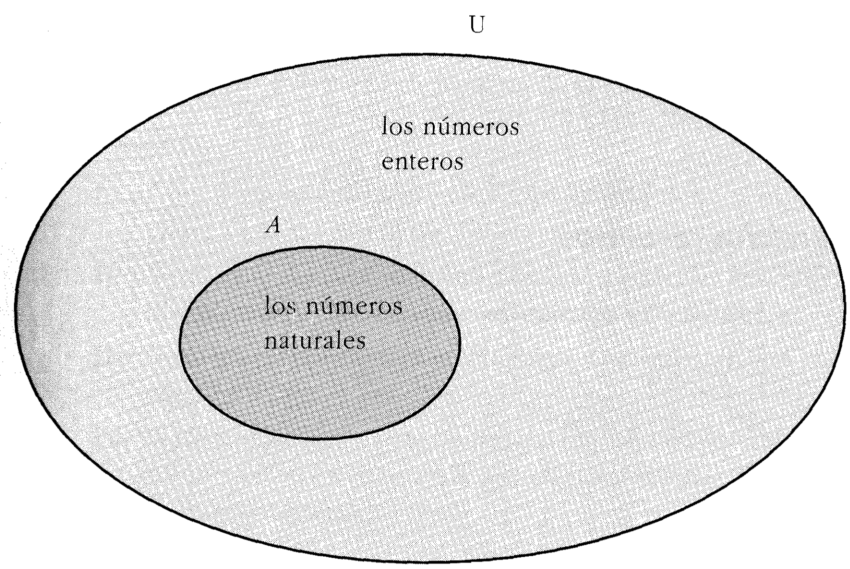
3. Sean los conjuntos:

$A = \{x / x \in \mathbb{N}\}$
$U = \{x / x \in \mathbb{Z}\}$, hallar A:

Solución:

Puesto que el conjunto universo está repreresentado por los números enteros y A está representado por los números naturales, se puede deducir que $A \subset U$.

Entonces, se tiene lo siguiente:



Recuerde que hemos establecido, al comenzar este libro, que vamos a considerar al cero como un número natural.

El conjunto A' es igual al conjunto de los enteros negativos:

A' = {-1;- 2; -3; -4; -5; -6........}

4. Sean los conjuntos:

$U = \{x / x \in \mathbb{Z}\}$
A = {x / x conjunto de los números primos}
B = {x / x conjunto de los números compuestos}
Hallar $(A \cup B)'$.

Solución:

Dado que el conjunto universo está dado por los números naturales, los conjuntos A y B son subconjuntos disjuntos de dicho conjunto.

El número 1 no es primo ni compuesto, pero pertenece al conjunto de los números naturales.

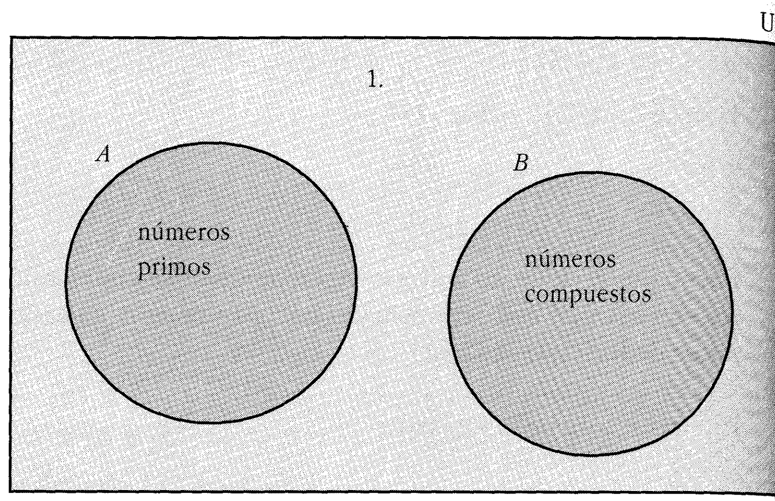
Recuerde:

Los números primos son aquellos que sólo admiten dos divisores: el mismo número y la unidad.
Ejemplo: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17...

Así como se discute la inclusión del cero en el conjunto de los números naturales, también existe una discusión respecto de si el 1 es un número primo o no, pues no tiene dos divisores, es él mismo.

Nosotros consideramos que el 1 no es primo, pues si lo fuera, la descomposición de cualquier número en factores primos presentaría muchos problemas.

Entonces tenemos:



Por lo que $(A \cup B)'$ es igual al elemento 1.
$(A \cup B)' = \{1\}$

Ejercicios resueltos

1. Señalar si lo siguiente es verdadero (V) o falso (F).

I. $\varnothing = 0$
II. $2 \in \{3; 4; 2\}$
III. $\{3; 4\} \subset \{1; 2\}$
IV. $\{1; 2\} \in \{1; 2; 3\}$

Solución:

I. (F) El conjunto vacío carece de elementos, el cero es u elemento del grupo de los números naturales.
II. (V) 2 está incluido en ese conjunto.
III. (F) El conjunto conformado por 3 y 4 no está incluido en conjunto formado por 1 y 2.
IV. (F) El símbolo $\in$ indica que estamos relacionando elemento Por lo tanto, el elemento $\{1; 2\}$ no pertenece al conjunto $\{1;$ $2; 3\}$.

2. Si $Q = \{4; 5; \{8\}; \{10; 11\}; 9; 12; \{15\}\}$, determinar qu proposiciones son verdaderas.

I. $\{4\} \subset Q$
II. $\{4; 5\} \subset Q$
III. $\{10; 11\} \subset Q$
IV. $\{\{15\}\} \subset Q$

Solución:

I. (V) El conjunto $\{4\}$ es un subconjunto de Q.

II. (V) El conjunto $\{4; 5\}$ es un subconjunto de Q.

III. (F) $\{10; 11\}$ es un elemento de Q, mas no un subconjunto; sería un subconjunto si estuviera entre llaves, de esta manera: $\{10; 11\}$.

IV. (V) $\{\{15\}\}$ es un subconjunto de Q.

3. Si $x \in C$ y D es un conjunto cualquiera, ¿cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I. $x \in (C \cup D)$

II. $x \in (C \cap D)$

III. $x \in (C - D)$

IV. $x \notin \overline{C}$

Solución:

I. (V) x pertenecerá al conjunto conformado por C y otros elementos que lleguen desde D.

II. (F) El conjunto conformado por la intersección de C y D no necesariamente tendrá a x como uno de sus elementos.

III. (F) x no siempre estará en el grupo de elementos que pertenezcan a C y no a D.

IV. (V) Si x pertenece a C, entonces el complemento es el conjunto conformado por elementos que no pertenecen a C. x no está en dicho conjunto.

4. Dados los conjuntos:

A = $\{1; 2; 3; 4\}$

B = $\{1; 4; 13; 14\}$

D = $\{15; 14; 13; 12;\ldots; 3; 2; 1\}$

¿Cuál de los siguientes conjuntos no es subconjunto de $(\overline{A \in B})$?

a) $\{\{5\}\}$

b) $\{5, 4\}$

c) $\{12; 13; 14; 15\}$

d) 7

e) Ninguno de los anteriores.

Solución:

Definimos a los elementos de cada conjunto nuevo:

$(A \cup B) = \{1; 2; 3; 4; 13; 14\}$

$D = \{15; 14; 13; 12... 3; 2; 1\}$

Entonces, $(\overline{A \cup B}) = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

Luego concluimos que $\{5, 4\}$ no es subconjunto de $(\overline{A \cup B})$; y que este no tiene al elemento 4.

5. ¿Cuál de los siguientes conjuntos es subconjunto de $(\overline{A \cap B})$?

a. $\{2; 3; 4; ...; 9; 10\}$
b. $\{1; 2; 3\}$
c. $\{\{2\}\}$
d. $\{2; 3; 5\}$
e) Ninguno de los anteriores

Solución:

Definiendo $A \cap B = \{1, 4\}$
Entonces, $(\overline{A \cap B}) = \{2; 3; 5; 6; 8: 9: 10: 11: 12: 13: 14: 15\}$
Por inspección, $\{2; 3; 5\}$ es un subconjunto de D.

6. Si $B = \{0; 1; 2\}$ y $R = \{0; \{1; 2\}\}$, determine el valor de verdad d las siguientes proposiciones:

I. B y R tienen el mismo número de subconjuntos.
II. $B \cup R = B$
III. $B \cap R = \emptyset$

Solución:

I. El número de subconjuntos viene dado por 2^n, donde n es número de elementos del conjunto.
El número de subconjuntos de B es $2^3 = 8$.
El número de subconjuntos de R es de $2^2 = 4$.
Por lo tanto, la proposición es falsa.

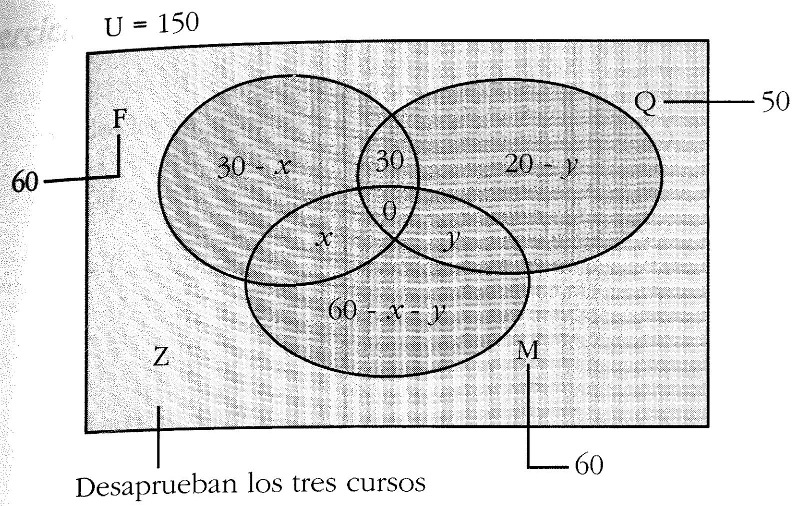
II. $B \cap R = \{0; 1; 2; \{1; 2\}\}$ y este conjunto es diferente de B. I proposición es falsa.

III. $B \cap R = \{0\}$; la proposición es falsa.

7. En una promoción de 150 alumnos, 50 alumnos aprobaron quím ca, 60 física, 60 matemática y 30 física y química. Se sabe tambié que 10 aprobaron química y matemática, 70 aprobaron sólo u curso y ninguno aprobó los tres cursos. ¿Cuántos alumnos fuer desaprobados en los tres cursos?

Solución:

Planteamos nuestro diagrama de Venn de acuerdo con información del problema. x, y y z son algunas incógnitas que n ayudarán a resolverlo.



Si se sabe que hay 150 alumnos:

$60 + 20 + 60 - x - y + z = 150$
$140 - (x + y) + z = 150$ (-140)
$z - (x + y) = 10$..(I)

Además, 70 aprobaron un solo curso:

$30 - x + 20 - y + 60 - x - y = 70$
$110 - 2x - 2y = 70$ $(+2x + 2y - 70)$
$40 = 2x + 2y$ (:2)

Sustituyendo II en I:

$z - 20 = 10$ (+20)
$z = 30$

Desaprobaron los tres cursos 30 alumnos.

8. ¿Cuántos alumnos aprobaron matemática y física?

Solución:

Matemática y física = $0 + x = x$.

Pero los que aprobaron química y matemática eran 10: $0 + y = 10$
$\Rightarrow y = 10$.

Reemplazando en II: $20 = x + 10$ (-10)
$10 = x \rightarrow x = 10$

Aprobaron física y matemática 10 alumnos.

9. ¿Cuántos alumnos aprobaron física o química?

Solución:

Química o física = $30 - x + 30 + x + 0 + y + 20 - y = 80$ alumnos aprobaron física o química.

10. Dados los siguientes conjuntos:

$A = \{x/x \text{ es par}\}$
$B = \{x/x \in \mathbb{N}\}$
$C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$
$D = \{x/x \in B \cap C\}$
$E = \{x/x \in A \cap B\}$
$F = \{x/x \in A - B\}$
$G = \{x/x \in E \cup D\}$
$U = Z$

Hallar $[(C - B)' \cap D] \cap B$.

Solución:

$C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

Definiendo por extensión los conjuntos B y D, tenemos:
$B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6................\}$
$D = \{x / x \in B \cap C\} \Rightarrow D = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$, entonces
$(C - B) = \phi \Rightarrow (C - B)' = \phi' = \cup = Z$

Ahora
$U \cap D = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$
$C \Rightarrow [[(C - B)' \cap D] \cap B] =$
$\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \cap \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6..........\}$
$= \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

Por lo tanto,
$[[(C - B)' \cap D] \cap B] = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

11. Hallar $[(A - C) \cup F]'$.

Solución:

$C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

Definiendo por extensión los conjuntos A y F:
$A = \{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12...\}$

Sabemos que
$F = \phi$
$A - C = \{\{0; 2; 4; 6; 8; 10; 12...\} - \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}\}$
$A - C = \{8; 10; 12;...\}$

Ahora
$[(A - C) \cup F] = \{8; 10; 12;...\}$

Ejercicios propuestos

Recuerde que para poder resolver estos ejercicios propuestos, primero debe revisar la teoría y los ejercicios resueltos.

1. Dados los conjuntos:

$R=\{x\in\mathbb{N}/x \text{ es par } \wedge x<4\}$

$O=\{x\in\mathbb{Z}/x<3 \vee x>7\}$

$Y=\{x\in\mathbb{N}/x\ 8\leq\wedge\ x\ \geq 2\}$,

Hallar $(R\cup Y)\cap O$ por extensión.

R. {0; 2; 8}

2. Si $R=\{y/y\in\mathbb{N}, 1\leq y<4\}$ y

$B=\{y/y\in\mathbb{N}, 5\leq y\leq 8\}$, hallar el número de subconjuntos de R - B.

R. 8

3. Hallar el número de subconjuntos de $(R\cup B)\cup(R\cap B)$ usando los mismos conjuntos del ejercicio anterior.

R. 128

4. Una persona en el mes de enero (31 días) consume 18 días carne y 15 días pescado. Hallar cuántos días consume carne y pescado. Tome en cuenta que cada día consume al menos uno de los dos productos.

R. 2

5. En una reunión, se observa que el 70% de las personas habla castellano, 120 personas hablan inglés y el 10% habla los dos idiomas. Si cada persona habla por lo menos uno de los dos idiomas, ¿cuántos hablan sólo castellano?

R. 180

6. Dados los conjuntos:

$A=\{1;2;3;4;5\}$

$B=\{2;3;4;5;6\}$

$C=\{1;4;6;7\}$

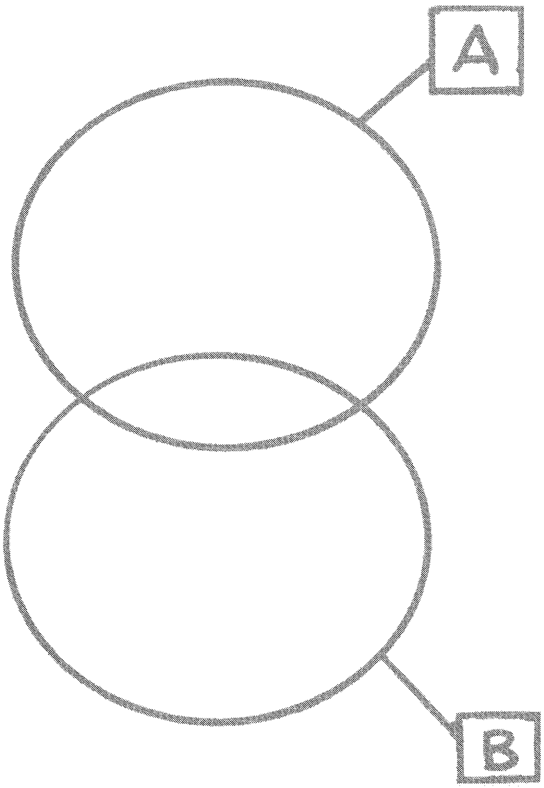
Hallar $[(A - B) \cap (B - C)] \cup (C - A)$ y dar como respuesta la su de sus elementos.

R. 13

7. Si $A = \{x \in \mathbb{N} / x = \dot{4} \wedge x < 30\}$

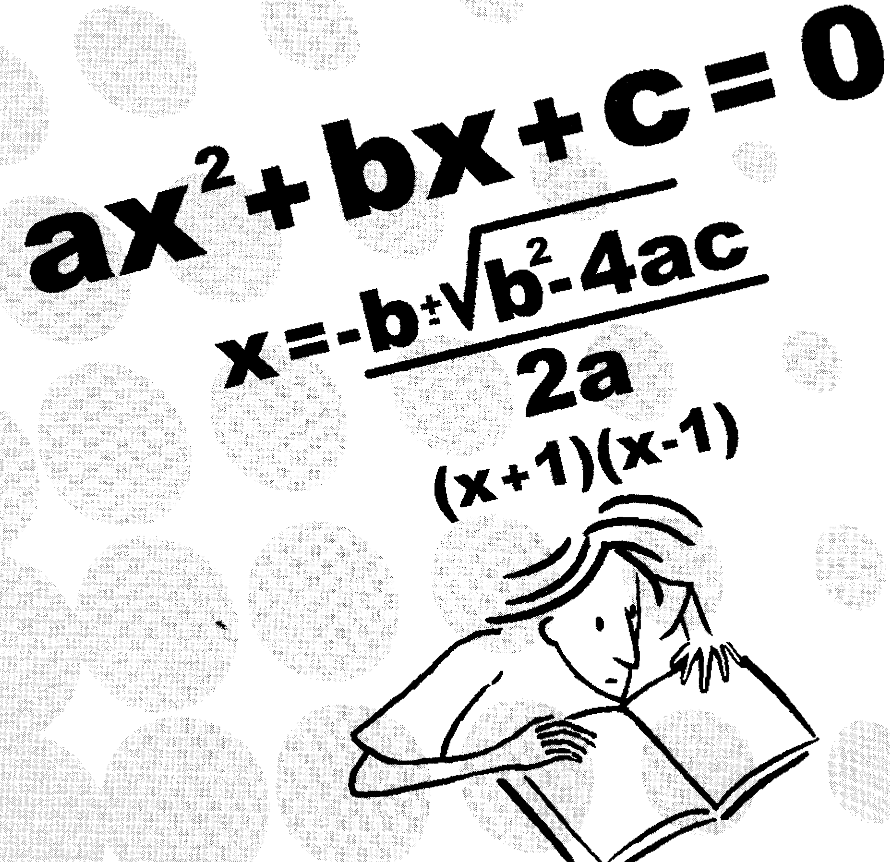
$B = \{x \in \mathbb{N} / x = \dot{5} \wedge x < 30\}$, hallar el número de subconjun de $A \cap B$.

R. 4



UNIDAD III

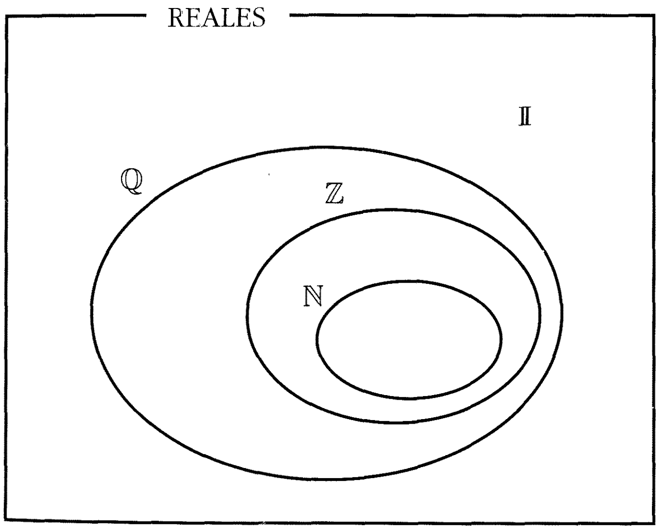
Números Reales



Capítulo 7
NÚMEROS REALES Y RECTA REAL

En el primer capítulo estudiamos el conjunto de los números naturales, de los números enteros y de los números racionales. Hemos visto que el conjunto de los naturales está incluido en el de los enteros y este, a su vez, en el de los racionales. En este capítulo, nos vamos a dedicar al estudio de un conjunto más amplio, que incluye a los números racionales y a los irracionales.

La relación entre estos conjuntos se puede apreciar en el siguiente diagrama de Venn:



Recuerde las relaciones de inclusión de conjuntos que vimos en la unidad anterior.

Hemos visto que existen números sin decimales o con una cantidad finita de decimales. También hemos visto que hay números con una cantidad infinita de decimales. En esos números, existe la posibilidad de que la serie infinita de decimales se repita periódicamente. En tales casos, si tenemos una cifra decimal, podremos predecir exactamente cuál cifra seguirá.

Por ejemplo, en el número 4,8758758..., podemos asegurar que el decimal que sigue al ocho será el siete, pues la serie que se repite es 875. A estos números se les llama decimales periódicos y hemos visto que también pueden expresarse como una fracción. Por ello, pertenecen al conjunto de los números racionales.

Sin embargo, existen números con decimales infinitos que no repiten periódicamente. En estos casos, es imposible predecir, a partir un decimal dado, el decimal siguiente.

En el número 3,54782..., no podemos asegurar cuál será el núme que le seguirá a 2. A estos números se les llama irracionales.

El conjunto que incluye a los números racionales y a los irracional es el conjunto de los números reales.

7.1 Aproximación y notación científica

No siempre es necesario trabajar con todos los decimales de número. Dependiendo del nivel de precisión que se requiera para ejercicio, podemos trabajar con valores aproximados.

El método de aproximación se verá más claramente a continu ción.

Ejemplos:

1. Aproximar 1/3 al centésimo.

   Solución:

   $$\frac{1}{3} = 0,33333...$$

   $$\frac{1}{3} = 0,333$$

   $$\frac{1}{3} = 0,33$$

2. Aproximar π a milésimos.

   Solución:

   $\pi = 3,1415926$ — Si queremos aproximar al milésimo, toma mos sólo los cuatro primeros decimales.

   $\pi = 3,1415$ — Como la última cifra es 5, y 5 es igual 5, entonces a la cifra que corresponde a milésima (1) se le aumenta 1, y se convierte 2.

   $\pi = 3,142$

7.2 Radicación

La radicación se define como la operación inversa a la potenciación cuando la base es conocida. Por ejemplo, si sabemos que $a^n = b$, entonces decimos que $\sqrt[n]{b} = a$. A diferencia de la potenciación, en la radicación no está definido el índice cero. Es decir, que dado $\sqrt[n]{b}$, entonces $n \neq 0$.

7.2.1 Propiedades

Para la radicación se cumplen las propiedades de la potenciación, pues una raíz se puede expresar como un exponente de la siguiente manera:

Exponente fraccionario:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Donde: $n \neq 0$

Indicaremos algunas propiedades de la radicación.

Recuerde las propiedades de la teoría de exponentes.

a. Raíz de un producto:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

Donde: $b, n \neq 0$

b. Raíz de un cociente:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Donde: $b, n \neq 0$

c. Raíz de raíz:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Donde: $m, n \neq 0$

Ejemplos:

1. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{x^{16}}}} = \sqrt[2\cdot3\cdot2]{x^{16}} = x^{\frac{16}{12}} = x^{\frac{4}{3}}$ o $x = \sqrt[3]{x^4}$

2. $\dfrac{2\sqrt{\sqrt{256}}}{\sqrt{81}} = \dfrac{2 \cdot 4}{9} = \dfrac{8}{9}$

7.2.2 Racionalización

Normalmente, se acostumbra evitar que las respuestas d operaciones tengan radicales en el denominador. Como los radi son números irracionales, al proceso de convertir los denominadore números racionales se le llama *racionalización*. El resultado que se obt al racionalizar una fracción sigue siendo un número irracional, pero y posee raíces en el denominador.

Vamos a analizar dos casos posibles de racionalización: cuand denominador posee un término (monomio irracional) y cuando posee (binomio irracional).

a. Denominador monomio irracional

Debemos multiplicar el numerador y el denominador por un mis número. A este número se le llama *factor racionalizante*. Debemos escog un factor racionalizante tal que al multiplicarlo por el denominador, resultado sea un número racional.

Con los denominadores racionalizados es más fácil realizar operaciones entre fracciones.

Ejemplos:

1. Racionalizar: $N = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Solución:

Factor racionalizante: $\sqrt{2}$

$$N = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \bullet \frac{\left(\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)}$$

Tenemos: $N = \dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{2}}{2}$.

Simplificando: $N = \sqrt{3 \bullet 2} = \sqrt{6}$

2. Racionalizar: $N = \dfrac{2}{\sqrt[3]{xy^2}}$

Solución:

Hallando el factor racionalizante *(F.R.)* de la siguiente manera:

$$\sqrt[3]{x^1 y^2} \quad \Rightarrow \quad F.R. = \sqrt[3]{x^{3-1} y^{3-2}} = \sqrt[3]{x^2 y}$$

Multiplicando la fracción por el factor racionalizante *(F.R.)*

$$N = \frac{2}{\sqrt[3]{xy^2}} \bullet \frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{\sqrt[3]{x^2 y}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2 y}}{\sqrt[3]{xy^2 x^2 y}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2 y}}{\sqrt[3]{x^3 y^3}} = \frac{2\sqrt[3]{x^2 y}}{xy}$$

b. Denominador binomio irracional

Vamos a analizar solamente los casos en los que los términos del binomio tienen raíces cuadradas. En estos casos, el factor racionalizante debe ser un binomio conjugado del anterior. Es decir, uno de sus términos (normalmente el segundo) debe tener el signo opuesto al que tenía en el binomio original.

Dado un binomio ($a + b$), el binomio conjugado será ($a - b$). Al multiplicar ambos binomios, se obtiene lo siguiente:

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$$

Así, se consigue eliminar las raíces cuadradas.

Ejemplo:

Racionalizar $M = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

Solución:

Factor racionalizante: $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

$$M = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \bullet \frac{\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}$$

Tenemos $\dfrac{\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \dfrac{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{2}}{3-2} = 5 + 2\sqrt{3}\sqrt{2} = 5 + 2\sqrt{6}$

Hemos visto ya la diferencia de cuadrados en el capítulo de Productos Notables.

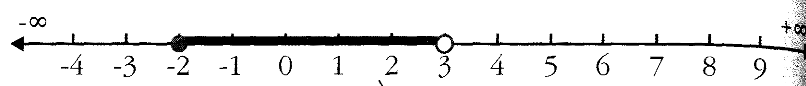
7.3 Recta real (intervalos)

Hemos visto en el segundo capítulo de este libro que un conjunto se puede representar en una recta numérica. La recta real es una recta en la que están comprendidos todos los números reales. Dentro de ella, podemos representar a todos los números reales mediante puntos. También podemos representar conjuntos continuos que se extienden desde un punto hasta otro. A estos conjuntos se les conoce como intervalos.

Los límites de un intervalo pueden ser abiertos o cerrados. Se dice que son cerrados cuando los extremos están contenidos en el intervalo, y que son abiertos cuando los extremos no están contenidos en el intervalo.

Por ejemplo, el intervalo $A = [-2; 3\rangle$ se lee como «intervalo cerrado en -2 y abierto en 3», lo cual significa que el -2 sí pertenece al intervalo, pero el 3 no.

Si $x \in [-2; 3[$, entonces x puede tomar cualquier valor comprendi
entre el -2 y el 3, incluyendo al -2, pero sin incluir al 3.



A = [-2; 3⟩

Existen intervalos finitos e intervalos infinitos. Los prime pueden representarse como un segmento sobre la recta real; los segund se representan por semirrectas o rectas sobre la recta real.

Revise la teoría de conjuntos para poder comprender esta sección.

Entre los intervalos, se dan las operaciones propias de l conjuntos, como ya hemos visto detalladamente en la unidad anteri Veamos algunos ejemplos.

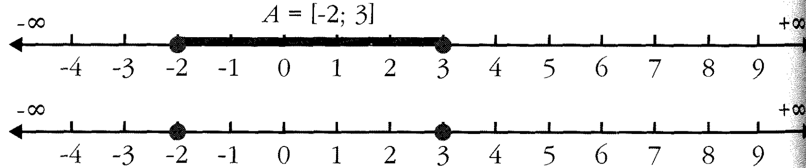
Ejemplos:

1. Si $A = [-2; 3]$ y $B = \{-2; 3\}$, determine $A \cap B$.

Solución:

Geométricamente, podemos representar a los conjuntos de siguiente manera:

$A = [-2; 3]$



$B = \{-2; 3\}$

De aquí observamos que los únicos elementos que están en A también en B son -2 y 3, por lo que:

$A \cap B = [-2; 3] \cap \{-2; 3\} = \{-2; 3\}$; o sea $A \cap B = \{-2; 3\}$

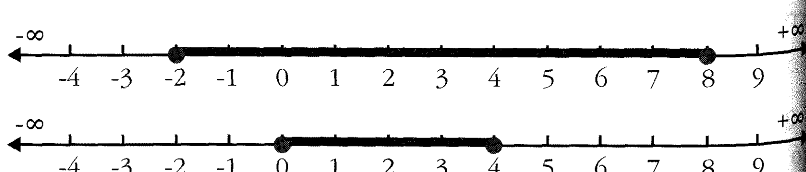
2. Hallar la diferencia de los siguientes intervalos.

Recuerde: los intervalos son representaciones de conjuntos en la recta real.

A = [-2; 8] y B = [0; 4]

Solución:

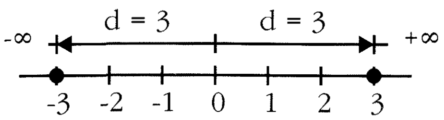
Geométricamente, podemos representar a los conjuntos A y B la siguiente manera:



De aquí observamos que los únicos elementos que están en A y no en B son $[-2; 0] \cap [4 ; 8]$

7.4 Valor absoluto

Hemos visto que todos los números reales pueden ser representados en la recta real. El valor absoluto de un número es la distancia de este al origen de la recta real. La expresión *valor absoluto de a* se representa por $|a|$. Veamos dos ejemplos en la recta real: uno para $a = -3$, y otro para $a = 3$.



En el gráfico, vemos que la distancia del número -3 al origen es la misma que la del número 3. Esa distancia mide 3 unidades. Esa distancia es el valor absoluto de ambos números, es decir:

$$|-3| = 3$$
$$|3| = 3$$

Piénselo de esta forma:

El valor absoluto es la cantidad del número.

El signo del número representa su sentido (a la derecha si es + , a la izquierda si es -).

Al valor absoluto de un número se le conoce también como el ***módulo del número***. Se podría decir que es el valor del número sin tomar en cuenta su signo. Por eso, el valor absoluto de todos los números, tanto de los positivos como de los negativos, es siempre positivo.

En general, podemos decir que:

$$\text{Si } a \leq 0 \Rightarrow |a| = -a$$
$$\text{y si } 0 \leq a \Rightarrow |a| = a$$

Ejemplos:

1. Calcular $E = \dfrac{|2| \bullet |2| \bullet |-4| \bullet |-6|}{-|5|}$

Solución:

Los valores absolutos de cada uno de los factores del numerador son 2; 2; 4 y 6. Efectuando el producto:

$2 \bullet 2 \bullet 4 \bullet 6 = 96$

Y el denominador es $-|5| = -5$; entonces $\dfrac{96}{5} = -19{,}2.$

2. Resolver $R=\sqrt{|2||-8|}+\sqrt{|10||-10|}$.

Solución:

Los valores absolutos serán $|2| = 2$; $|-8| = 8$; $|40| = 40$; $|-10|$ =

En sus respectivos radicales $\sqrt{2 \bullet 8}=4$ *y* $\sqrt{40 \bullet 10}=20$.

Sumando 4 + 20 = 24

Para resolver este ejercicio necesitará una calculadora.

Ejercicios resueltos

1. Hallar el resultado de $\frac{\sqrt{6}}{2}$ con aproximación al milésimo.

Solución:

$\sqrt{6}=2{,}4494897...$ entonces $\frac{2{,}4494897...}{2}=1{,}2247448...$

Y luego, 1,2247448... al redondear el milésimo, tenemos:

1,2247 » 1,225

2. Resolver aproximando al diezmilésimo $0,\widehat{26} \bullet 12+3$.

Solución:

Sabemos que $0,\widehat{26}$ es igual a 0,26262626... y efectuando 0,2626... • 12, tenemos:
0,2626 • 12 = 3,15151515...; luego, + 3
3,15151515... + 3 = 6,151515...
Aproximando al milésimo, tenemos 6,1515 » 6,152.

Tenga presente la jerarquía de las operaciones.

Primero, las multiplicaciones; luego, las sumas.

3. Resolver y aproximar al diezmilésimo $\frac{7}{9} \bullet 18=\sqrt{26}$.

Solución:

Efectuando $\frac{7}{9} \bullet 18=14$, luego, $\sqrt{26}=5{,}0990195...$

Tenemos 14 - 5,0990195... = 8,9009804...
Aproximando al diezmilésimo, tenemos
8,9009804... = 8,90098 = 8,9010

4. Operar y emplear notación científica de $2\pi-4 \bullet \sqrt{3}+3\sqrt{5}$

7.

Solución:

Efectuando cada término, tenemos en cada miembro una expresión irracional del modo siguiente:

$2\pi = 6,2831853...; 4\sqrt{3} = 6,9282032...; 3\sqrt{5} = 6,7082039...$

Después, tenemos: 6,2831853... - 6,9282032... + 6,7082039...
= 6,0631860... = 6,0632 10^0 = 6,1 • 10^0

5. Efectuar $E = \pi\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)0,3}$ y dar la suma de los dígitos de E cuando aproxima al milésimo.

Solución:

$$E = 3,14 \bullet \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)0,3}$$

$$E = 3,14 \bullet \sqrt{\frac{87}{60}\bullet 0,3}$$

$$E = 3,14 \bullet \sqrt{1,45\bullet 0,3}$$

$$E = 3,14 \bullet \sqrt{0,435}$$

$$E = 2,072022...$$

Aproximando al milésimo, tomando primero cuatro cifras:
2,0720 ≈ 2,072

La suma de sus dígitos es 2 + 0 + 7 + 2 = 11.

6. Reducir $P = \sqrt{\sqrt[3]{a}} \bullet \sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} \bullet \sqrt[4]{\sqrt[5]{a}} \bullet \sqrt[5]{\sqrt[6]{a}}$.

Solución:

$$P = \sqrt[6]{a} \bullet \sqrt[12]{a} \bullet \sqrt[20]{a} \bullet \sqrt[30]{a}$$

Expresando en forma de potencia de a, tenemos:

$$P = \left[a^{\frac{1}{6}} \bullet a^{\frac{1}{12}} \bullet a^{\frac{1}{20}} \bullet a^{\frac{1}{30}}\right]$$

El producto de bases iguales, nos queda

$$P = a^{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}}$$

Hallando el m.c.m.

$$P = a^{\frac{10+5+3+2}{60}} = a^{\frac{20}{60}} = a^{\frac{1}{3}}$$

7. Efectuar: $24x^2\sqrt{45a^3} \div 6x\sqrt{5}$.

Aquí hemos aplicado la siguiente propiedad:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Solución:

$$24x^2\sqrt{45a^3}\ \div\ 6x\sqrt{5}=\frac{24x^2\sqrt{45a^3}}{6x\sqrt{5a}}$$

$$=\frac{24x^2}{6x}\sqrt{\frac{45a^3}{5a}}=4x\bullet\sqrt{9a^2}=4x\bullet 3a=12ax$$

8. Efectuar $12\sqrt{5x^2}\div 3\sqrt[3]{5x}$.

Solución:

Hallamos el m.c.m. de los índices 2 y 3, el cual es 6.

$$12\sqrt{5x^2}=12\sqrt[6]{(5x^2)^3}=12\sqrt[6]{125x^6}$$

$$3\sqrt[3]{5x}=3\sqrt[6]{(5x)^2}=3\sqrt[6]{25x^2}$$

$$12\sqrt{5x^2}\div 3\sqrt[3]{5x}=\frac{12\sqrt{5x^2}}{3\sqrt[3]{5x}}=\frac{12\sqrt[6]{125x^6}}{3\sqrt[6]{25x^2}}=4\sqrt[6]{\frac{125x^6}{25x^2}}=4\sqrt[6]{5x^4}$$

9. Simplifica $E=\sqrt[5]{16\bullet\sqrt[3]{4\bullet\sqrt[4]{32\bullet\sqrt{8}}}}$.

Solución:

La expresión dada se puede escribir de la siguiente manera:

$$E=\sqrt[5]{2^4\bullet\sqrt[3]{2^2\bullet\sqrt[4]{2^5}\bullet\sqrt{2^3}}}$$

Ahora, separamos las raíces:

$$E=\sqrt[5]{2^4}\bullet\sqrt[5]{\sqrt[3]{2^2}}\bullet\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^5}}}\bullet\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt[2]{2^3}}}}$$

Aquí hemos aplicado la siguiente propiedad:

$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$

Expresando E como potencia de 2:

$$E=\left[2^{\frac{4}{5}}\bullet 2^{\frac{2}{15}}\bullet 2^{\frac{5}{60}}\bullet 2^{\frac{3}{120}}\right]=2^{\frac{4}{5}+\frac{2}{15}+\frac{5}{60}+\frac{3}{120}}$$

$$\frac{4}{5}+\frac{2}{15}+\frac{5}{60}+\frac{3}{120}=\frac{96+16+10+3}{120}=\frac{125}{120}=\frac{25}{24}$$

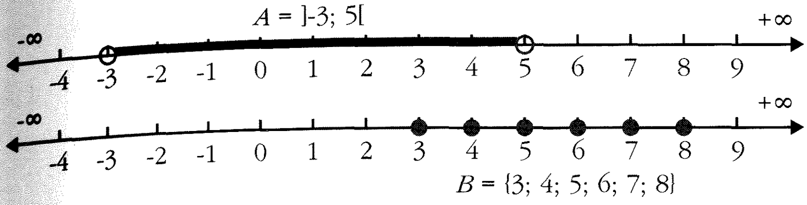
$$E=2^{\frac{25}{24}}$$

10. Determine $A\cup B$ si

$A=\,]-3;5[$; y $B=\{3;4;5;6;7;8\}$

Solución:

Representemos A y B geométricamente:



De aquí observamos que $A \cup B =]-3: 5] \cup \{6; 7; 8\}$.

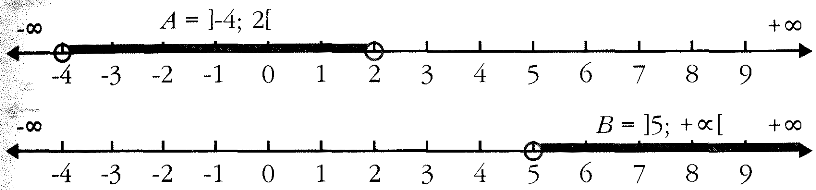
11. Sean los conjuntos

$A =]-4; 2[$ $\qquad B =]5; +\infty[$

Determine $A \cup B$.

Solución:

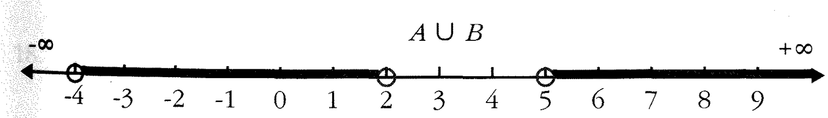
Representaremos A y B geométricamente:



De aquí observamos que:

$A \cup B =]-4; 2[\ \cup \ ]5; +\infty[$

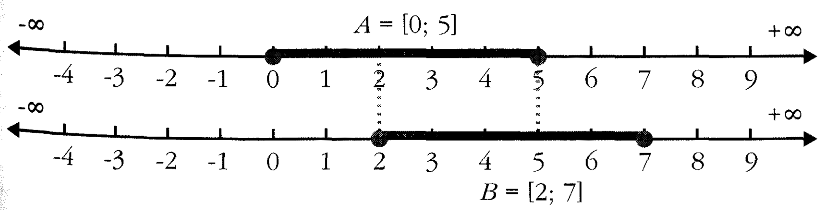
Geométricamente, podemos representar $A \cup B$ así:



12. Si $A = [0; 5]$ y $B = [2; 7]$, determine $A \cup B$.

Solución:

Geométricamente, podemos representar los conjuntos A y B de la manera siguiente:



Recuerde:

$A = \{a; b\}$ incluye sólo a los números a y b; $A = [a; b]$; es un intervalo que va desde a hasta b.

De aquí podemos observar que los elementos que están en A también en B son los números reales desde 2 hasta 5.

$A \cap B = [0; 5] \cap [2; 7] = [2; 5]$; o sea : $A \cap B = [2; 5]$

13. Si dos conjuntos están definidos de la siguiente manera:

$A = [-3; 5]$ $\quad B = \{5\}$

Hallar A - B.

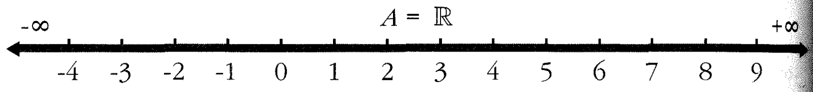
Solución:

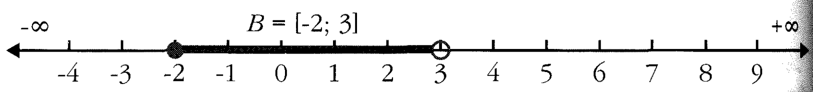
A - B = [-3; 5] - {5} = [-3; 5> $\qquad$ A - B = [-3; 5>

14. Si $A = \mathbb{R}$ y $B = [-2; 3]$, determine A - B y B - A

Solución:

Representemos A y B geométricamente:





De aquí podemos observar que:

1. A - B = $\mathbb{R}$ - |2; 3> = <-∞; -2> $\cup$ [3; + ∞>

   A - B = <-∞; -2> $\cup$ [3; + ∞[

2. Por observación del intervalo, tenemos:

   B - A = |-2; 3> - $\mathbb{R}$ = ϕ

Es importante que sepa que en estos ejercicios lo más conveniente es resolver desde adentro hacia afuera.

15. $E = \left|-\left|(|52| - |60|)\right|\right|$.

Solución:

Primero resolvemos los V.A. internos $E = \left|-\left|(52 - 60)\right|\right|$.

Luego, el paréntesis $E = \left|-|-8|\right|$

$E = |-8|$

$E = 8$

16. $R = \left|\sqrt{|12| + |-120| + \left||-|-50|\right| + |10| - 23}\right|$.

Solución:

Primero, resolvemos los V.A. internos:

$$-\left|\sqrt{12+120+50+10-23}\right|$$

$$-\left|\sqrt{169}\right|$$

$$-|13|$$

$$-13$$

17. Calcular el valor numérico de la siguiente expresión:

$$D=\frac{\left(\dfrac{|23{,}5|\ +\ |-19{,}7|}{-|11{,}3|\ +18}\right)}{\dfrac{|2\ -\ 4|}{67}}$$

Solución:

Primero, resolvemos los V.A. internos. Operando en los reales, queda:

$\dfrac{\left(\dfrac{23{,}5\ +19{,}7}{-11{,}3\ +18}\right)}{\dfrac{2}{67}}$; después, efectuando las operaciones de cada término del numerador principal, tenemos:

$$\frac{\left(\dfrac{43{,}2}{6{,}7}\right)}{\dfrac{2}{67}}=\frac{43{,}2\ \bullet\ 67}{6{,}7\ \bullet\ 2}\quad\rightarrow\quad\frac{432}{2}=216$$

18. Efectuar y aproximar al tercer dígito decimal:

$$\left||23{,}563|\ -\ |-14{,}2356|\ +\ |10{,}857|\ \bullet\ |-10{,}8457|\ -\ \sqrt{2{,}16665}\right|$$

Solución:

Eliminando los valores absolutos, tenemos:

$$\left|23{,}563-14{,}2356+10{,}857+10{,}857-\sqrt{2{,}16665}\right|$$

$$|23{,}563-14{,}2356+117{,}7516...-1{,}47195...|$$

$$|125{,}60705...|$$

$$125{,}607\underline{05}$$

$$125{,}607$$

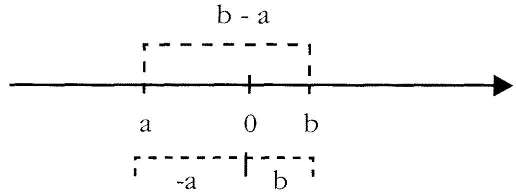
19. Resolver $|x - 5| = -2$.

Para hacer aproximaciones, necesitamos un dígito más del que nos piden. Si es mayor o igual a 5, aumentamos 1 al dígito anterior; si es menor que 5, lo dejamos igual.

Solución:

Esta igualdad es imposible. Por tanto, la solución es vacía.

$|a - b| = |b - a|$ representa la distancia entre a y b.



La distancia siempre es una cantidad positiva. No existen distanc negativas.

Expresar un número en notación científica significa mostrarlo como una unidad y una décima multiplicada por una potencia de 10.

20. Resolver $\left(\left|\dfrac{-\sqrt{\sqrt{12,67}+\left|\sqrt{25,59}\right|}}{21.\left(\sqrt{6,42}-\sqrt{4,9}\right)}\right|\right)^3 \bullet \sqrt{\varepsilon\pi}$ y expresar en notaci científica.

Solución:

$\sqrt{12,67}=3,559494...$ $\qquad$ $\sqrt{4,9}=2,213594...$

$\left|\sqrt{25,59}\right|=\sqrt{25,59}=5,058655...$ $\qquad$ $\sqrt{6,42}=2,53377...$

Operando ahora: .

$$\left(\left|\frac{\sqrt{8,618150...}}{-21.0,320177...}\right|\right)^3 \rightarrow \left(\left|\frac{-2,935668...}{-6,723728...}\right|\right)^3 \Rightarrow 0,08323206...$$

$$\sqrt{\varepsilon\pi}=\sqrt{8,539734...}=2,922282...$$

$$\rightarrow \frac{0,08323206...}{2,922282...}=0,02848186... \Rightarrow 2,848186 \bullet 10^2$$

$$\Rightarrow 2,8 \bullet 10^{-2}$$

Recuerde:
$\pi = 3,14$
$\varepsilon = 2,71$

Ejercicios propuestos

1. Empleando notación científica, resolver la siguiente expresión:

$12456,121212...+\frac{5}{6}\varepsilon-\sqrt{\pi}$ (considere $\varepsilon=2,718281828...$)

R. $1,2 \bullet 10^4$

2. Expresar en notación científica y también con aproximación milésimo.

$5\frac{2}{3} : 4\frac{1}{7}$

R. $1,3 \bullet 10^0$; 1,368

3. Expresar E en notación científica:

$$E=\sqrt{0{,}2 \bullet \sqrt{\pi\varepsilon}+\frac{1}{7}}$$

R. $8{,}5 \bullet 10^{-1}$

4. Hallar el valor de n en

$$\sqrt{\frac{2^n-2^6}{2^8-2^n}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

R. 7

5. Si A = [-3; 4] y B = [-1; 7], determine $A \cup B$.

R. A = [-3; 7]

6. Si A = <-∞; 2> y B = {-2; 2}. Determine $A \cup B$.

R. <-∞; 2 |

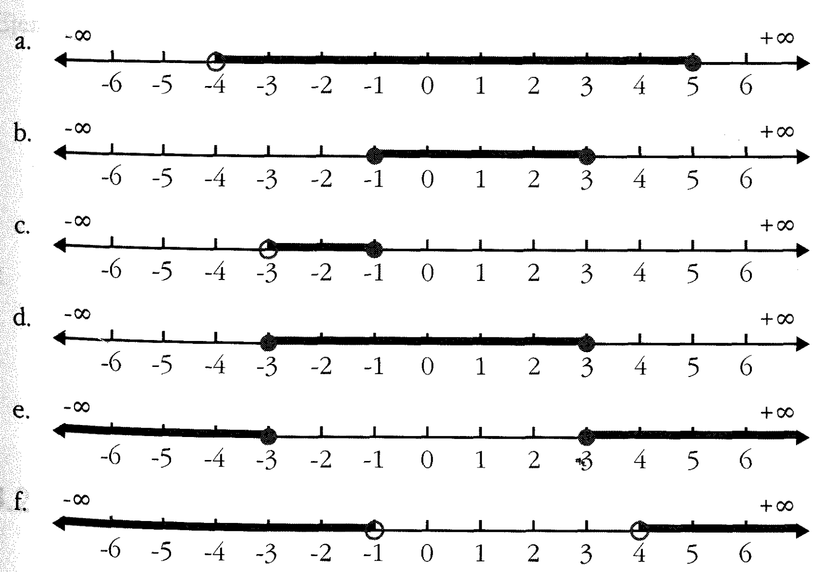
7. Considere los siguientes intervalos:

A = [-3; 3] ; B = -3; 3 ; C = [-1; 4] ; D = -4; 5]

Dibuje sobre la recta real el resultado de las siguientes operaciones:

a. $A \cup D$
b. $A \cap C$
c. $B - C$
d. $A \cap (B \cup C)$
e. B' (el complemento de B)
f. C' (el complemento de C)

R.



8. Calcular: $H=3\left|\sqrt{11}-2\right|+11\left|4-\sqrt{99}\right|+\left|55-\sqrt{11}\right|$

R. $35\sqrt{11}+5$

> Recuerde que siempre puede consultar la teoría y los ejercicios resueltos.
>
> π vale 3,14...
> ε vale 2,71...

> Para realizar el ejercicio 4, debe elevar ambos miembros de la igualdad al cuadrado.

9. Si $a = b + 1$ $b + 1 = c + 9$ $c + 9 = -7$,
Calcular $|a| + |b| + c|c| + |a + b + c|$.
R. -210

10. Efectuar:

$$B = \frac{-\left||-2,7|^2 - |-3,3|^3\right|}{1,2}$$ y aproximar al milésimo. Dar como respuesta la suma de sus cifras.

R. 23

11. Aproximar al centésimo y expresar en notación científica:

$$M = \left(\frac{\left|-\sqrt{\sqrt{1,67} + \left|\sqrt{2,55}\right|}\right|}{\left|-2 \bullet \left(\sqrt{6,42} - \sqrt{4,9}\right)\right|} \right)^2 \pi$$

R. 22,13; $2,2 \bullet 10^1$

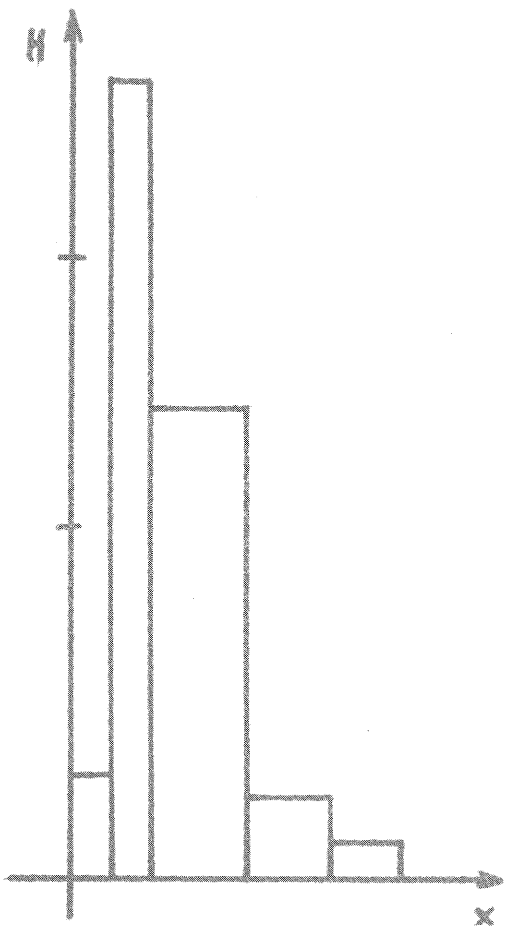
12. $$B = \left| \sqrt{\left(\frac{18}{36} \bullet \frac{4}{6} \bullet \frac{9}{12}\right)} - \frac{\sqrt{|-225|}}{3} \right|^2 - 2,525634$$, efectuar y expresar en notación científica.

R. $1,8 \bullet 10^1$

13. Resolver:

$$B = \frac{\left|-\left||-125,7|^2 - |-53,3|^3\right|\right|}{-\sqrt{|-5021|}}$$

R. $-1,9 \bullet 10^3$



Capítulo 8
ECUACIONES

8.1 Ecuaciones lineales

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. A cada una de dichas expresiones se les denomina miembros de la ecuación. En una ecuación lineal (también llamada ecuación de primer grado), los miembros son polinomios de primer grado. Una raíz o solución es el valor que debe tomar la incógnita o variable de la ecuación para que la igualdad se verifique, es decir, para que el valor numérico del primer miembro sea igual al del segundo miembro.

Para resolver una ecuación, debemos realizar las mismas operaciones con cada uno de sus miembros, de tal manera que la incógnita quede sola en uno de ellos. A la derecha y entre paréntesis indicaremos la operación que realizamos en cada caso.

Los valores de la incógnita que satisfacen la ecuación pertenecen al conjunto solución.

Ejemplos

1. $2x + 3 = 11$ (-3) Restamos 3 a ambos miembros.
   $2x = 8$ (:2) Dividimos ambos miembros entre 2.
   $x = 4$
   C.S. $= \{4\}$

2. $3x - 26 = 14 - 2x$ $(+2x + 26)$
   $5x = 40$ (:5)
   $x = 8$
   C.S. $= \{8\}$

Las operaciones a la derecha de la ecuación se llaman transformaciones equivalentes.

8.2 Ecuaciones cuadráticas

En una ecuación cuadrática, uno de los miembros es un polinomio de segundo grado (es decir, el grado de uno o más términos de la ecuación es 2). Las ecuaciones cuadráticas de una incógnita se pueden reducir a la siguiente expresión:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Vamos a estudiar dos maneras de resolver las ecuaciones cuadráti La primera es mediante la fórmula general, la segunda es mediante factorización.

8.2.1 Fórmula general

Debemos identificar los valores correspondientes de a, b y c. Lueg los reemplazamos en la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El símbolo $\pm$ indica que existen dos soluciones: una cuan utilizamos más (+) y otra cuando utilizamos menos (-).

En ese caso, las soluciones serían:

$$x_1 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces el conjunto solución será:

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\}$$

8.2.2 Factorización

Recuerde que en la primera unidad hicimos ejercicios de factorización.

Al reducir una ecuación cuadrática a la forma $ax^2 + bx + c =$ podemos aplicar lo visto en el sexto punto del capítulo de factorización que corresponde a los trinomios de la forma $Ax^{2n} + Bx^n + C$. En ese ca la ecuación quedaría así:

$$(mx - p)\ (nx - q) = 0$$

Cuando tenemos que el resultado de un producto es cero, pode concluir que alguno de sus factores debe ser necesariamente cero.

$mx - p = 0$, de donde obtenemos que $x_1 = \dfrac{p}{m}$; o

$nx - q = 0$; de donde obtenemos que $x_2 = \dfrac{q}{n}$.

El conjunto solución sería:

$$C.S.=\left\{\frac{p}{m};\ \frac{q}{n}\right\}$$

Ejemplos:

1. Resolver la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Solución:

Mediante la solución general:

$$x_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\bullet 6}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=$$

$$\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{6}{2}=3 \\ x_2=\frac{4}{2}=2 \end{cases}$$

2. Resuelva la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Solución:

Mediante la solución general:

$$x_{1,2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-4\bullet 6}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=$$

$$\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{6}{2}=3 \\ x_2=\frac{4}{2}=2 \end{cases}$$

Recuerde la jerarquía de las operaciones combinadas.

8.3 Ecuaciones fraccionarias

Una ecuación fraccionaria es aquella en la que al menos uno de sus miembros posee un término fraccionario, es decir, un término que posee una incógnita en el denominador.

Como la división entre cero no está definida para los núme[ros] reales, tenemos que evitarla restringiendo los posibles valores de [la] incógnita, de tal manera que ningún denominador de la ecuación sea ce[ro]. Es recomendable hacer esta restricción antes de comenzar a operar.

Para resolver una ecuación fraccionaria debemos, como en el ca[so] de las ecuaciones lineales con fracciones, multiplicar ambos miembr[os] de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores. [En] muchos casos, será necesario factorizar los denominadores para encont[rar] este m.c.m.

No podemos admitir $x = 8$ como solución de la ecuación de la derecha, pues, de hacerlo, el primer miembro de la ecuación sería:

$$\frac{4}{0}$$

Dividir entre 0 es imposible.

Ejemplos

1. Resolver: $\dfrac{4}{8-x}=\dfrac{3}{4}$

Solución:

Restringido el denominador tenemos que $8 - x \neq 0$
$\Rightarrow x \neq 8$

Ahora

$$\frac{4}{8-x}=\frac{3}{4} \qquad \text{m.c.m.} = 4(8 - x)$$

$$4(4) = 3(8 - x) \qquad \text{Por la propiedad distributiva:}$$
$$16 = 24 - 3x \qquad (+3x) \text{ y } (- 16)$$
$$3x = 8 \qquad (:3)$$
$$x=\frac{8}{3}$$

2. Resolver $\dfrac{3x-2}{2x+3} = \dfrac{3x-1}{2x+1}$

Solución:

Restringiendo los denominadores tenemos que

$$2x + 3 \neq 0 \qquad (-3)$$
$$2x \neq -3 \qquad (:2)$$
$$x \neq \frac{-3}{2}$$

Análogamente,

$$2x + 1 \neq 0$$
$$2x \neq -1$$
$$x \neq \frac{-1}{2}$$

Ahora:

$$\frac{3x-2}{2x+3} = \frac{3x-1}{2x+1} \qquad \bullet\ (2x + 3)(2x + 1)$$

$$(3x - 2)(2x + 1) = (2x + 3)(3x - 1)$$

$$
\begin{aligned}
6x^2 + 3x - 4x - 2 &= 6x + 2x + 9x - 3 \\
6x^2 - x - &= 6x^2 + 7x - 3 && (-6x^2) \\
-x - 2 &= 7x - 3 && (-7x)\, y + 2 \\
-8x &= -1 && (: -8) \\
x &= 1/8
\end{aligned}
$$

8.4 Ecuaciones irracionales

Las ecuaciones irracionales son aquellas en las que uno de sus miembros es un polinomio irracional, es decir, un polinomio que posee uno o más términos con exponente fraccionario (i.e. con una raíz).

Para resolver estas ecuaciones, debemos elevar ambos miembros de la ecuación a un exponente tal que hagan desaparecer los exponentes fraccionarios. En muchos casos, se deberá realizar este procedimiento más de una vez.

Es posible que al elevar una ecuación a una potencia se filtren soluciones que no corresponden al conjunto solución. Por eso, al obtener los valores de x, debemos verificarlos en la ecuación original antes de incluirlos en el conjunto solución.

Ejemplos

1. $\sqrt{8 - x^2} = x$ Al cuadrado:

$\left(\sqrt{8 - x^2}\right)^2 = (x)^2$

$8 - x^2 = x^2$ $(+ x^2)$

$2x^2 = 8$ $(: 2)$

$x^2 = 4$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$

Verificación:

Si $x = 2$

$\sqrt{8 - 2^2} = 2$

$\sqrt{4} = 2$ Sí cumple

Si $x = -2$

$\sqrt{8 - (-2)^2} = -2$

$\sqrt{4} = -2$ No cumple

Por lo tanto

C.S. $= \{2\}$.

> Los resultados que obtiene al operar son sólo candidatos a la solución de la ecuación. Por eso, debe verificarlos reemplazándolos en la ecuación original.
>
> Si pasan la prueba, formarán parte del conjunto solución.

2. $\sqrt[3]{12x+8}=x+2$ (Al cubo)

$$\left(\sqrt[3]{12x+8}\right)^3=(x+2)^3$$

$$12x+8=x^3+3x^2+6x+8$$

$$x^3+6x^2=0$$

$$x^2(x+6)=0$$

$x=0$ o $x=-6$

Recuerde lo que vimos anteriormente respecto del valor absoluto.

8.5 Ecuaciones con valor absoluto

Cuando en una ecuación la variable está afectada por un símbo de valor absoluto, debemos despejar la expresión con valor absoluto luego operar aplicando la siguiente propiedad:

Si $|x|=$ a, entonces tenemos dos posibilidades:
$x=a$ o $x=-a$.

Así, el conjunto solución sería:
C.S. $=\{-a;\ a\}$

Ejemplos:

1. Encontrar la solución de $|x|+2=1$.

   Solución:

   Tenemos la ecuación: $|x|+2=1$ (-2)

   $|x|=-1$

   Sabemos que el valor absoluto es siempre positivo, por lo que expresión $|x|=-1$ no se puede resolver o, lo que es equivalen no existe en x que solucione la ecuación.

2. Resolver y dar la suma de cada una de las soluciones al cuadrad
   $14|x|+10-8|x|-8=3$

   Solución:

   Ordenando términos, tenemos: $14|x|-8|x|+10-8=3$

   $$6|x|+2=3$$

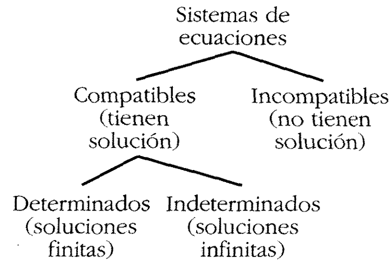
   $$6|x|=1$$

   $$|x|=\frac{1}{6}$$

   Entonces, hay dos soluciones posibles $x=\frac{1}{6}\vee\ x=-\frac{1}{6}$

   $\therefore$ Elevándolas al cuadrado y sumándolas $\frac{1^2}{6}+\left(-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{2}{36}=$

8.6 Sistema de ecuaciones lineales



Un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que tienen más de una incógnita. Se dividen en sistemas compatibles (aquellos que tienen solución) y sistemas incompatibles (aquellos que no tienen solución). A su vez, los sistemas compatibles se dividen en sistemas compatibles determinados (aquellos que tienen una cantidad finita de soluciones) y sistemas compatibles indeterminados (aquellos que poseen infinitas soluciones).

En este capítulo, vamos a ver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Para resolver un sistema de ecuaciones, podemos utilizar básicamente dos métodos.

8.6.1 Sustitución

Consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y reemplazarla en la otra. Con esto obtenemos una sola ecuación con una incógnita.

Ejemplo:

1. $x - y = 1$
   $2x + 3y = -8$

   Despejamos x en la primera ecuación:
   $x = y + 1$

   Después, reemplazamos este resultado en la segunda ecuación:
   $2(y + 1) + 3y = -8$

   Resolviendo esta segunda ecuación, podemos obtener el valor de y: $2y + 2 + 3y = -8$

   $y = -2$; si reemplazamos este valor en la ecuación anterior, obtendremos el valor de x:

   $x = -2 + 1$
   $x = -1$
   C.S. = $\{(-1; -2)\}$

En este caso, al conjunto solución pertenece el par ordenado (-1; -2). Este par ordenado, como veremos en la unidad siguiente, se puede representar como un punto en un plano cartesiano.

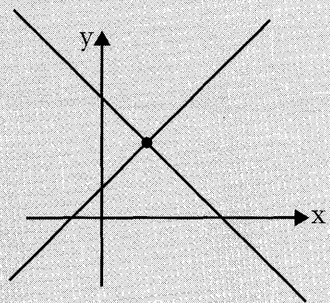
8.6.2 Reducción

Consiste en transformar mediante multiplicaciones a ambas ecuaciones, con el fin de que al sumarlas miembro a miembro se elimine alguna de las incógnitas.

Una ecuación con dos incógnitas es una gráfica en un plano.

En este capítulo, estamos viendo ecuaciones lineales; por lo tanto, la gráfica será una recta.

La solución de un sistema de dos ecuaciones lineales es un punto en el plano.



Ejemplo

1. $x - y = 1$
$2x + 3y = -8$

Multiplicamos por 2 la primera ecuación:

$2x - 2y = 2$

Restamos la primera ecuación de la segunda (así queda eliminada una de las incógnitas):

$$\begin{array}{r} 2x + 3y = -8 \\ -2x + 2y = -2 \\ \hline 5y = -10 \\ y = -2 \end{array}$$

Ejercicios resueltos

1. Hallar x:
$7x + 12 - (4 - 3x) = 6x + 40$

Solución:

$$\begin{aligned} 7x + 3x - 6x &= 40 - 12 + 4 \\ 4x &= 32 \qquad (:4) \\ x &= 8 \\ \text{C.S.} &= \{8\} \end{aligned}$$

2. Resolver la siguiente ecuación lineal:

$$\frac{3x+1}{3} = \frac{x+15}{12}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{3} &= \frac{x+15}{12} \qquad (\bullet\ 12) \\ 12x + 4 &= x + 15 \qquad (-x\ -4) \\ 11x &= 11 \qquad (:11) \\ x &= 1 \\ \text{C.S.} &= \{1\} \end{aligned}$$

Cuando tiene fracciones en una ecuación, debe multiplicarla toda por el m.c.m. de sus denominadores.

3. Resolver la siguiente ecuación lineal:

$$\frac{x}{1} - 3 = \frac{x}{3} + 3$$

Solución:

$\frac{x}{2}-3=\frac{x}{3}+3$ (+ 3)

$\frac{x}{2}=\frac{x}{3}+6$ (-x/3)

$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=6$ (m.c.m = 6)

$3x - 2x = 6$ (6)

$x = 36$

C.S. = {36}

4. Resolver la siguiente ecuación lineal:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{2x-3}{5}$$

Solución:

$\frac{x-2}{3}=\frac{2x-3}{5}$ (•m.c.m = 15)

$\frac{15(x-2)}{3}=\frac{15(2x-3)}{5}$

$5(x - 2) = 3(2x - 3)$ Por propiedad distributiva:

$5x - 10 = 6x - 9$ (+ 10)

$5x = 6x - 9 + 10$ (- $6x$)

$5x - 6x = 1$

$x = -1$

C.S. = {-1}

5. Resolver la siguiente ecuación lineal:

$$\sqrt{x-1}+2x=3x-7$$

Solución:

$\sqrt{x-1}+2x=3x-7$ (- $2x$)

$\sqrt{x-1}=x-7$ elevando al cuadrado:

$\left(\sqrt{x-1}\right)^2=(x-7)^2$

$x - 1\ x^2 - 14x + 49$

Ordenando los términos con incógnitas:
$x^2 - 15x + 50 = 0$

Resolviendo por aspa simple:
$x = 10$ o $x = 5$

Pero $\sqrt{x-1}=x-7$; o sea, $x - 7 > 0$.

Sólo se cumple para $x = 10$.
C.S.: {-10}

> Recuerde la solución de este producto notable:
> $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
>
> ¡No vaya a cometer el error de escribir
> $(x - 7)^2 \Rightarrow x^2 - 49$!

6. Resolver $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Solución:

$$x=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\bullet 2\bullet 3}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{4}=$$

$$\frac{7\pm 5}{4}= \quad x_1=\frac{12}{4}=3 \qquad x_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\text{C.S.}\left\{\frac{1}{2};3\right\}$$

7. Resolver $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Solución:

$$x=\frac{7\pm\sqrt{-4\bullet 10}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{9}}{2}=$$

$$\frac{7\pm 3}{2}= \quad x_1=\frac{10}{2}=5 \qquad x_2=\frac{4}{2}=2$$

$$\text{C.S.}=\{5;\ 2\}$$

$$x^2=25 \quad x=\pm\sqrt{25} \quad x_1=\sqrt{25}=5 \qquad x_2=-\sqrt{25}=-5$$

8. Resolver $\dfrac{y-6}{y}-\dfrac{6}{y}=\dfrac{y+6}{y-6}$.

Solución:

$$\frac{y-6}{y}-\frac{6}{y}=\frac{y+6}{y-6}$$

Efectuamos la resta de la fracción con denominadores homogéneos:

$$\frac{y-6-6}{y}=\frac{y+6}{y-6} \Rightarrow \frac{y-12}{y}=\frac{y+6}{y-6}$$

Restringiendo los denominadores, tenemos:

$y \neq 0$ $\qquad$ $y - 6 \neq 0$

$\Rightarrow y \neq 6$

En el caso de las expresiones algebraicas, el m.c.m. de los denominadores se obtiene por multiplicación directa.

Ahora:

$$\frac{y-12}{y}=\frac{y+6}{y-6} \qquad \bullet\,(y)\quad(y-6)$$

$$\begin{aligned}
(y-12)(y-6) &= (y)(y+6) \\
y^2-6y-12y+72 &= y^2+6y \\
y^2-18y+72 &= y^2+6y && (-y^2) \\
-18y+72 &= 6y && (-6y)-(72) \\
-24y &= -72 && :(-24) \\
y &= 3
\end{aligned}$$

9. Resolver $\frac{-4}{x-1}=\frac{7}{2-x}+\frac{3}{x+1}$.

Solución:

Restringiendo los denominadores, tenemos:

$x-1 \neq 0$	$2-x \neq 0$	$x+1 \neq 0$
$\Rightarrow x \neq 1$	$\Rightarrow x \neq 2$	$\Rightarrow x \neq -1$

Ahora:

$$\frac{-4}{x-1}=\frac{7}{2-x}+\frac{3}{x+1} \qquad \bullet(x-1)(2-x)(x+1)$$

$$\begin{aligned}
-4(2-x)(x+1) &= 7(x-1)(x+1)+3(x-1)(2-x) \\
-4(2x+2-x^2-x) &= 7(x^2-1)+3(2x-x^2-2+x) \\
-8x-8+4x^2+4x &= 7x2-7+6x-3x^2-6+3x \\
4x^2-4x-8 &= 4x^2+9x-13 && (-4x^2) \\
-4x-8 &= 9x-13 && -9x+8 \\
-4x-9x &= -13+8 \\
-13x &= -5 && \div(-13) \\
x &= 5/13
\end{aligned}$$

10. Resolver: $\frac{x+a}{x-2}+\frac{x-a}{x-1}=2$.

Solución:

Restringiendo los denominadores, tenemos:

$x-2 \neq 0$	x $-1 \neq 0$
$\Rightarrow x \neq 2$	$\Rightarrow x \neq 1$

Ahora operamos:

$$\frac{x+a}{x-2}+\frac{x-a}{x-1}=2 \qquad \bullet(x-2)(x-1)$$

$$\begin{aligned}
(x+a)(x-1)+(x-a)(x-2) &= 2(x-2)(x-1) \\
x^2-x+ax-a+x^2-2x-ax+2a &= 2(x^2-x-2x+2) \\
2x^2-3x+a &= 2x^2-6x+4 && (-2x^2) \\
-3x+a &= -6x+4 && +6x-a \\
3x &= 4-a && \div 3 \\
x &= \frac{4-a}{3}
\end{aligned}$$

11. Resolver la siguiente ecuación:

$$\sqrt[4]{x^4-2x-1}=x$$

Solución:

> $x=-\frac{1}{2}$ es sólo un «candidato» a la solución.
>
> Para saber si pertenece o no al CS, debemos verificarlo.

$\sqrt[4]{x^4-2x-1}=x$ Elevamos a la cuarta:

$\left(\sqrt[4]{x^4-2x-1}\right)^4=(x)^4$

$x^4 - 2x - 1 = x^4$ $(-x^4)$

$-2x - 1 = 0$ $(+ 1)$ y $:(-2)$

$x=-\frac{1}{2}$

Verificación:

$$\sqrt[4]{\left(-\frac{1}{2}\right)^4-2\left(-\frac{1}{2}\right)-1}=-\frac{1}{2}$$

No cumple porque la solución de una raíz cuadrada siempre es positiva.
C.S. { }.

12. Resolver la siguiente ecuación:

$$\sqrt{5x-1}+\sqrt{x+3}=4$$

Solución:

$\sqrt{5x-1}=4-\sqrt{x+3}$ Al cuadrado.

$\left(\sqrt{5x-1}\right)^2=\left(4-\sqrt{x+3}\right)^2$

$5x-1=16-8\sqrt{x+3}+x+3$

$4x-20=-8\sqrt{x+3}$ (:4)

$x-5=-2\sqrt{x+3}$ Al cuadrado.

$(x-5)^2=\left(-2\sqrt{x+3}\right)^2$

$x^2 - 10x + 25 = 4x + 12$

$x^2 - 14x + 13 = 0$ Por aspa simple.

$(x - 1)(x - 13) = 0$

$x = 1$ o $x = 13$

Verificando las raíces para ver si son soluciones de la ecuación.

Para $x = 1$ $\Rightarrow$ $4 = 4$ ... sí cumple.

Para $x = 13$ $\Rightarrow$ $12 = 4$ ... no cumple.

C.S. = {1}

> No se confunda pensando que
> $\left(4-\sqrt{x+3}\right)^2 \Rightarrow 4^2-\left(\sqrt{x+3}\right)^2$

13. Resolver la siguiente ecuación:

$$\sqrt{18x-8}=\sqrt{2x-4}+2\sqrt{2x+1}$$

Solución:

$\sqrt{18x-8}=\sqrt{2x-4}+2\sqrt{2x+1}$ Al cuadrado:

$\left(\sqrt{18x-8}\right)^2=\left(\sqrt{2x-4}+2\sqrt{2x+1}\right)^2$

$18x-8=2x-4+4\sqrt{2x-4}\sqrt{2x+1}+8x+4$

$4\sqrt{4x^2-6x-4}=8x-8$ (:4)

$\sqrt{4x^2-6x-4}=2x-2$ Al cuadrado:

$4x^2 - 6x - 4 = 4x^2 - 8x + 4$

$2x = 8$

$x = 4$

Verificación:

$\sqrt{18 \bullet 4-8}=\sqrt{2-4-4}+2\sqrt{2-4+1}$

$\sqrt{64}=\sqrt{4}+2\sqrt{9}$

$8 = 2 + 2 \times 3$ Sí cumple

C.S. {4}

14. Resolver $|-10x + 3| = 17$

Solución:

De acuerdo con lo que conocemos de V.A., la expresión $-10x + 3$ podría ser igual a 17 o -17.
Entonces, tendríamos dos posibles ecuaciones: $-10x + 3 = 17$ y $-10x + 3 = -17$.

Resolviendo:	$-10x + 3 = 17$	(-3);	$-10x + 3 = -17$	(-3)
	$-10x = 14$	(:4);	$-10x = -20$	(:10)
	$x = -1{,}4$	;	$x = 2$	

C.S. = {-1,4; -2}

15. Señalar el valor de verdad en cada uno de estos casos:

1. $|xy|=|x||y|;\ \forall\ x,y\in\mathbb{R}$
2. $|x^2|=x^2;\ \forall\ x\in\mathbb{R}$
3. $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|};\ \forall\ x,y\in\mathbb{R}$

Solución:

1. Verdadero. Sin importar cuáles valores estén contenidos en los valores absolutos, no hay restricciones para x e y.

2. Verdadero.
Sea x positivo, entonces tenemos:

$|x| = x \rightarrow |x|^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = x^2;\ \forall\ x\in\mathbb{R}$

Sea x negativo, entonces tenemos:

$|x| = -x \rightarrow |x|^2 = x^2 \Rightarrow (-x^2) = x^2; \Rightarrow x^2 = x^2;\ \forall\ x\in\mathbb{R}$

$\forall\ x,y\in\mathbb{R}$ significa para todo x e y pertenecientes a $\mathbb{R}$

3. Falso. En la relación:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|};\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ \ y \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Debe trabajar de forma ordenada. Resuelva las ecuaciones una por una.

16. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

Solución:

Multiplicamos la primera ecuación por 2 y la segunda por 3:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 2 \\ 9x - 6y = 0 \end{cases} +$$

Al sumar, tenemos $13x = 2$

$$x = \frac{2}{13}$$

Sustituimos el valor encontrado de x en la segunda ecuación:

$$3\frac{2}{13} - 2y = 0$$

$$y = \frac{3}{13}$$

C.S. $\left\{\left(\frac{2}{13}, \frac{3}{13}\right)\right\}$

17. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 3 \\ x + 2y = 12 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 3 & \bullet(4) \\ x + 2y = 12 & \bullet(-2) \\ 2x + y = 12 & + \\ -2x - 4y = -24 & \end{cases}$$

Al sumar, obtenemos:

$-3y = -12$ • (-3)

$y = 4$

Sustituimos el valor encontrado en la segunda ecuación:

$x + 2(4) = 12$

$x + 8 = 12$

$x = 4$

C.S. = {(4; 4)}

18. Un moderno buque de turismo tiene camarotes dobles (dos ca
y simples (1 cama). Si se ofertan 65 camarotes que en total ti

105 camas, ¿cuál es el número de camarotes simples y dobles que hay?

Solución:

Llamemos al número de camarotes dobles x y al número de camarotes simples y. Planteamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{lcr} x+y=65 & \bullet(-1) & -x-y=-65 \\ 2x+y=105 & & 2x+y=105\ + \\ & & x=40 \end{array}$$

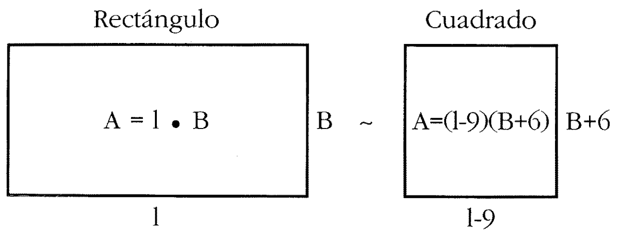
Reemplazamos el valor hallado de x en cualquiera de las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{rl} 40+y=65 & -(40) \\ y=25 & \end{array}$$

Por lo tanto, se ofertan 25 camarotes simples y 40 camarotes dobles.

19. Si el lado mayor de un rectángulo fuese 9 cm más corto y el lado menor fuese 6 cm más largo, la figura sería un cuadrado con la misma área que la del rectángulo. ¿Cuál sería el área del cuadrado?

Solución:



Entonces $B + 6 = l - 9 \Rightarrow l - B = 15$ ....(I)

Además, nos dicen que el área debe ser igual a la del cuadrado.

$$(B+6)(l-9) = Bl$$
$$Bl + 6l - 9B = Bl$$
$$6l - 9B = 54 \quad \text{...(II)}$$

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} l-B=15 & \bullet\ (-9) \\ 6l-9B=54 & \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} -9l+\cancel{9B}=54 & \\ 6l-\cancel{9B}=-135 & \\ \hline -3l=81 & ,\ (-3) \\ l=27 & \end{array}$$

Reemplazamos en (I):

$$27 - B = 15$$
$$B = 12$$

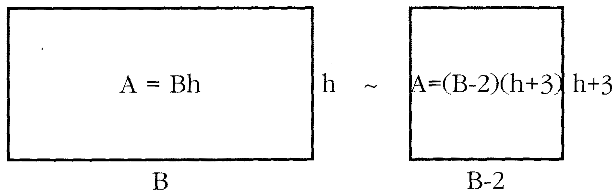
El área será $27 \bullet 12 = 324\ cm^2$.

Cuando dos figuras tienen la misma área, se dice que son equivalentes.

20. Hallar la base y la altura de un rectángulo sabiendo que si se aum ta 3 cm a la altura y se disminuye 2 cm a la base, su área no aume ni disminuye. Además, la altura es 2 cm mayor que la base.

Solución:

Sabemos que $h = 2 + B$ ....(I)
Además,



Primero, simplifique las ecuaciones una por una. Luego, aplique el método que prefiera.

Las áreas son iguales:

$$Bh = (B - 2)(h + 3)$$

$3B - 2h = 6$ .... (II)

Juntamos las dos ecuaciones:

$$h = 2 + B$$
$$3B - 2h = 6$$

De donde se obtiene:

$$B = 10$$
$$h = 12.$$

Ejercicios propuestos

1. Resolver la ecuación lineal:

$$\frac{3x+1}{5} - \frac{x-1}{4} = \frac{5-x}{5}$$

R. C.S. = {1}

2. Resolver $\frac{x}{2} + 3 = \frac{7}{3}$.

R. C.S. = $\left\{\frac{-4}{3}\right\}$

3. Calcular la raíz de la ecuación:

$$\frac{5x}{3} + \frac{x}{2} - 3 = \frac{2x}{12}$$

R. C.S. = $\left\{\frac{3}{2}\right\}$

Revise la teoría y resuelva paso a paso los ejercicios propuestos.

4. Resolver $2x^2 + 8 = 0$.

R. { }

5. Resolver $x^2 - 5x + 6 = 0$.

R. {2; 3}

6. Resolver $x^2 = 2x + 3$.

R. {-1; 3}

7. Encuentre dos números cuya suma sea 32 y su producto 255.

R. 15 y 17.

8. Resolver $\frac{2x-3}{x} = \frac{2x}{x+1}$.

R. -3

9. Resolver $\frac{x^2+2x+4}{x+2} + \frac{x^2-2x+4}{x-2} = 2x$.

R. 0

Para resolver estas ecuaciones, debe despejar la raíz.

10. Resolver $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x+a+b}{x+a-b}$.

R. $\frac{-a}{1+b}$

11. Resolver la siguiente ecuación:

$7 + \sqrt[3]{5x-2} = 9$

R. 2

Recuerde que al elevar al cuadrado, debe aplicar el producto notable:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

12. Resolver la siguiente ecuación:

$x + \sqrt{4x+1} = 5$

R. 2

13. Resolver $|4x + 3| = 7$.

R. {-2,5; 1}

Recuerde que del valor absoluto se obtienen dos soluciones.

Observe que es lo mismo $|x^2|$ que $|x|^2$.

En el ejercicio 15, le conviene hacer un cambio de variable.

14. Resolver: $\left|\frac{2x+8}{3x-12}\right|=1$

R. $\left\{\frac{5}{4};20\right\}$

15. Resolver $|x^2| + 42 = 13|x|$.

R. {-7; -6; 6; 7}

16. Resolver $\left|\frac{1}{4}x+1\right|=\frac{13}{4}$.

R. {-17; 9}

17. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3u+2v=9 \\ u+3v=10 \end{cases}$$

R. {1; 3}

18. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2y+3y=1 \\ 3x- \ y=0 \end{cases}$$

R. {1/11; 3/11}

19. Mariafé tiene una cierta cantidad de monedas de 20 céntimos decide cambiarlas por monedas de un sol. Si el número de moned disminuyó en 80, ¿cuánto dinero tiene?

R. 20 soles.

20. Hallar las edades de Joaquín y María Luisa sabiendo que actualme suman 10 años, y que hace 1 año sus edades guardaban una relaci de 3 a 1.

R. 7 y 3.

21. Una compañía fabrica un producto para el cual el costo varia por unidad es de \$6 y el costo fijo de \$80 000. Cada unidad ti

un precio de venta de $10. Determine el número de unidades que deben venderse para obtener una utilidad de $60 000.

R. 60 000

22. Una fábrica produce ropa deportiva para dama y está planeando vender su nueva línea de conjuntos deportivos a detallistas. El costo para estos será de $33 por conjunto. Por conveniencia del detallista, la fábrica colocará una etiqueta con el precio en cada conjunto. ¿Qué cantidad debe ser marcada en las etiquetas de modo que el detallista pueda reducir este precio en un 20% durante una liquidación y aún obtener una ganancia de 15% sobre el costo?

R. 47,44

23. Un total de $10 000 se invirtieron en dos empresas comerciales A y B. Al final del primer año, A y B tuvieron rendimientos de 6 y $5\frac{3}{4}\%$, respectivamente, sobre las inversiones originales. ¿Cuál fue la cantidad original asignada a cada empresa, si la utilidad total fue de $588,75?

R. $5500

24. Vivian y Marco quieren comprar una casa, de modo que han decidido ahorrar la cuarta parte de sus respectivos salarios. Vivian gana $24,00 por hora y recibe $8,00 extra a la semana por declinar las prestaciones de la empresa, mientras Marco gana $28,00 por hora más las prestaciones. Ellos quieren ahorrar al menos $405,00 semanales. Si trabajan el mismo número de horas, ¿cuántas horas debe trabajar cada uno de ellos cada semana?

R. 61 horas

25. El costo de un producto es de S/.3,40. Si se desea obtener una ganancia del 20% sobre el precio de venta, ¿a qué precio debe venderse el producto?

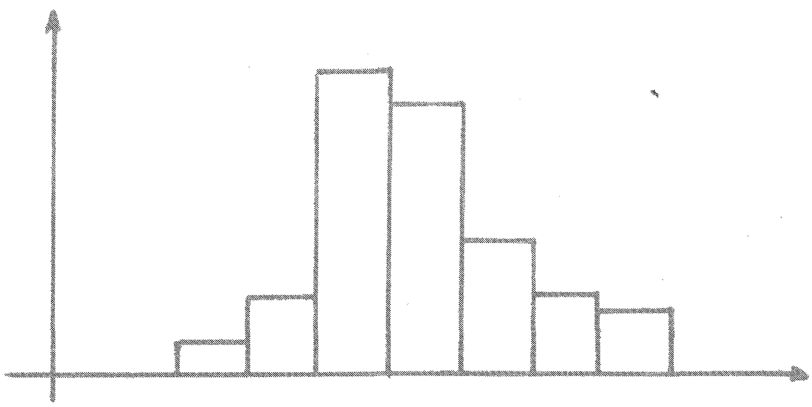
R. S/.4,25

26. Una compañía de refinación de maíz produce gluten de maíz para alimento de ganado, con un costo variable de $76 por cada mil kilos. Si los costos fijos son $110 000 mensuales y el alimento se vende en $126 por tonelada, ¿cuántas toneladas deben venderse para que la compañía tenga una utilidad mensual de $540 000?

R. 13 000

27. Si las ecuaciones de oferta y demanda de cierto producto so $125p - q - 250 = 0$ y $100p + q - 1100 = 0$, respectivament encuentre el punto de equilibrio.

R. 6



Capítulo 9
INECUACIONES

Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas.

9.1 Inecuaciones de primer grado

Las inecuaciones de primer grado se resuelven como una ecuación de primer grado. Lo único que cambia es la naturaleza del conjunto solución. En las ecuaciones, el C.S. es, normalmente, un número. En las inecuaciones, en cambio, es un intervalo.

Ejemplo:

Tenemos que resolver como si fuese una ecuación común:

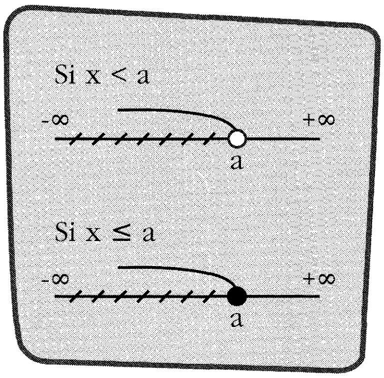
$x + 4 > 2(x - 3) + 4x - 5$

$x + 4 > 2x - 6 + 4x - 5$

$x + 4 > 6x - 11$ $\qquad -x + 11$

$15 > 5x$ $\qquad (, 5)$

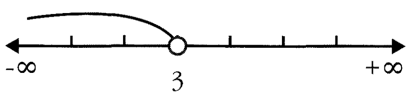
$3 > x$



El símbolo *menor que*, al igual que el símbolo *mayor que*, representa límites abiertos. Ambos símbolos en la recta numérica se representan con círculos en blanco sobre los puntos.

El símbolo *menor o igual que*, al igual que el símbolo *mayor o igual que*, representa límites cerrados. En la recta numérica, se representan con círculos en negro sobre los puntos.

Así, si ubicamos el punto $3 > x$ en la recta numérica, tendremos:



C.S. = $-\infty, 3$

9.2 Inecuaciones de grado mayor que 1

Estas inecuaciones se pueden reducir, mediante operaciones co factorizaciones, a expresiones de la forma:

$$\frac{(x-a)^2(x-b)^n}{(x-c)^p} \leq 0$$

Si la desigualdad es del tipo menor o igual ($\leq$) o mayor o igual ($\geq$), x podrá tomar los valores de a y b. En caso contrario, x no podrá ser ni a ni b. En ningún caso, x podrá ser c.

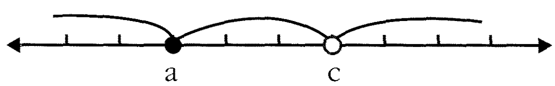
Debemos analizar para qué valores de x la expresión cambia de signo. Para ello, debemos fijarnos en los exponentes. Sabemos que un exponente par no cambia de signo a la base, mientras que un exponente impar sí lo hace. Entonces, debemos considerar solamente los factores cuyos exponentes sean impares. Igualando estos factores a cero, obtendremos los puntos críticos, aquellos en los que la expresión cambia de signo:

Suponiendo que sólo m y p son impares, los puntos críticos serían:

$x - a = 0$; $x = a$ (punto crítico)

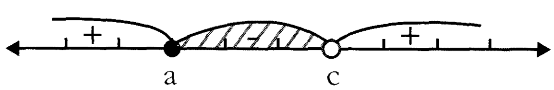
$x - c = 0$; $x = c$ (punto crítico)

Si ubicamos los puntos críticos en la recta numérica, esta quedará dividida en tres regiones:



Observa que el punto c lo hemos representado como abierto. Esto se debe a que pertenece al denominador, por lo que x no podrá tomar nunca el valor c.

Después de graficar los puntos, debemos dividir las secciones generadas en positivas y negativas, comenzando con las positivas desde la derecha y alternando:



Como la inecuación nos pide que la fracción sea menor que cero, debemos tomar las regiones negativas del gráfico. En este caso, sería el intervalo $[a; c[$

Por lo tanto, el conjunto solución será:

C.S.: $[a; c[$

9.3 Inecuaciones con valor absoluto

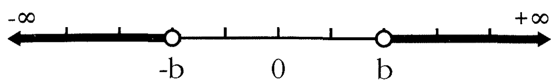
Al resolver una inecuación con valor absoluto, debemos tratar de simplificarla de tal manera que nos quede una expresión del tipo $|x| > b$, o una del tipo $|x| < b$.

9.3.1 Primer caso: inecuaciones del tipo | x | > b

Si el valor absoluto de x es mayor que b, x debe ser o mayor que b o menor que $-b$ ($x < -b$ ó $x > b$).

Gráficamente, tenemos:

Si $|x| > b$



El conjunto solución será:

C.S. = $<-\infty; -b> \cup <b; -\infty>$

9.3.2 Segundo caso: inecuaciones del tipo | x | < b

Si el valor absoluto de x es menor que b, x debe ser o menor que b o mayor que $-b$. ($-b < x < b$).

Gráficamente, tenemos:

Si $|x| < b$

El conjunto solución será:

C.S. = $<-b: b>$

Recuerde lo visto en los capítulos anteriores sobre el valor absoluto.

Ejemplos:

1. Hallar: $|x + 3| > 5$.

   $x + 3 > 5$ o $x + 3 < -5$

   Solución:

   $x < 2$ $\qquad x < -8$

Entonces, el conjunto solución será la unión de los dos intervalos:

$$x \in]-\infty; -8[\cup]2; \infty[$$

2. Hallar $|x + 2| \leq -1$.

   Solución:

   C.S. $= \phi$.

   El valor absoluto de $x + 2$ no puede ser negativo para ningún valor de x.

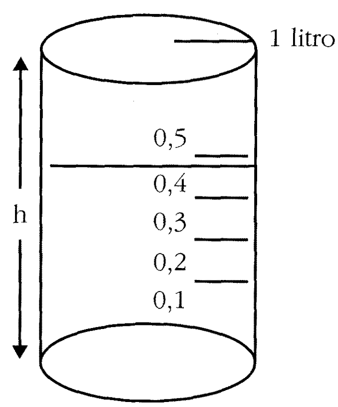
Ejercicios resueltos

1. Un vaso de ½ litro (500 cm^3) tiene forma cilíndrica y un radio interior de 4 cm. ¿Cuán exactamente debemos medir la altura h del agua en el vaso para estar seguros de tener ½ litro de agua con un error menor del 1%, esto es, un error menor que 5 cm^3?

   Solución:

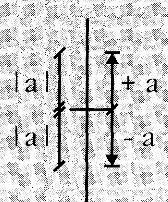
   El volumen V del agua en el vaso está dado por la fórmula:

   $V = \pi r^2 h = 16h\pi$ (volumen real)



En este ejercicio, puede observar la utilidad del operador valor absoluto.

Nos sirve para representar un límite de dispersión, ya sea por exceso o por defecto.



Decir que se quiere tener un error menor de 5 cm^3 en la medida del volumen equivale a decir que

$$|V - 500| < 5$$

Pero

$$|V - 500| < 5 \rightarrow |16\pi h - 500| < 5$$
$$|16\pi h - 500| < 5 \rightarrow -5 < 16\pi h - 500 < 5$$

$$\frac{495}{16\pi} < h < \frac{500}{16\pi} \rightarrow 9{,}8477 < h < 9{,}9471$$

Nota: la diferencia (hs - hi) = 0,0994; 0,1 cm = 1 mm (milímetro). Esto indica que debemos medir la altura con una precisión de cerca de 1 mm (aproximadamente, el ancho de las marcas de calibración del vaso).

2. Resolver $|3x + 1| \leq 2x - 5$.

Solución:

Por propiedad, tenemos:

$-2x - 5 \leq 3x + 1 \leq 2x - 5$

$-2x + 5 \leq 3x + 1 \quad \wedge \quad 3x + 1 \leq 2x - 5$

$-2x + 5 \leq 3x + 1 \quad (-5 - 3x) \qquad 3x + 1 \leq 2x - 5 \quad (-1 - 2x)$

$-5x \leq -4 \quad : (-5) \qquad \Rightarrow x \leq -6$

$$\Rightarrow x \geq \frac{4}{5}$$

Ahora, analicemos la intersección:

$$\left[\frac{4}{5};+\infty\right\rangle \cap \left\langle -\infty;-6\right] = \phi$$

C.S. = { }

Recuerde:

Si $|x| < b$
$-b < x < b$.

3. Resolver:

$|x|^2 + 2|x| - 3 < 0$

Solución:

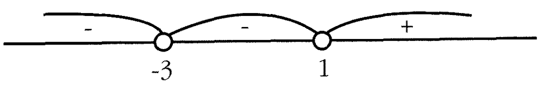
Haciendo un cambio de variable conveniente $y = |x|$, formamos una inecuación de segundo grado.

$y^2 + 2y - 3 < 0$ factorizando

$(y + 3)(y - 1) < 0$ puntos críticos

Puntos críticos:

$y = -3$ e $y = 1$



C.S. =]-3, 1[

Volviendo a x:

$-3 < y < 1$

$-3 < |x| < 1$

$-3 < |x|$........(I) y $|x| < 1$.......(II)

(I) C.S.1: R porque todos los números reales cumplen con tal condición:

(II) $|x| < 1$

$-1 < x < 1$

C.S.2 =]-1; 1[

C.S. = C.S.1 ∩ C.S.2 = C.S. =]-1; 1[

Cuando haga un cambio de variable, no olvide regresar a la variable original.

4. Resolver $|3x| \leq |2x - 5|$

Solución:

$3x = 0$ cuando $x = 0$

$2x - 5 = 0$ cuando $x = 5/2 = 2,5$

Por tanto, esa inecuación se convierte en tres inecuaciones según intervalo donde se halle x:

Cuando $x < = 0$, tenemos:

$$-(3x) \leq -(2x - 5);$$
$$-3x \leq -2x + 5;$$
$$-x \leq 5;$$
$$x \geq -5$$

Es decir, soluciones en el intervalo [-5; 0].

Cuando $0 < x = 2{,}5$, tenemos:

$$-3x \leq -(2x - 5)$$
$$-3x \leq -2x - 5$$
$$5x \leq 5;$$
$$x \geq 1.$$

Soluciones <0; 1|

Cuando $x > 2{,}5$, tenemos:

$3x \leq 2x - 5; x \leq -5$

Aquí no se presentan intersecciones.

Por lo tanto, C.S. = [-5, 1].

5. Si $x \in [-3; 2]$, calcular $M = |2x - 6| - 2\,|x - 2|$.

Solución:

$$*\text{Si } -3 > x > 2 \qquad \bullet(2)$$
$$-6 > 2x > 4 \qquad (-6)$$
$$-12 > 2x - 6 > -2$$

Entonces, el valor de $2x - 6$ es negativo. Su valor absoluto será:

$|2x - 6| = 6 - 2x$

$$*\text{ Si } -3 > x > 2 \qquad (-2)$$
$$-5 > x - 2 > 0$$

Entonces, el valor de $x - 2$ es negativo, por lo que su valor absoluto será:

$|x - 2| = 2 - x$

Ahora reemplazamos en M:

$$M = (6 - 2x) - 2(2 - x)$$
$$M = 6 - 2x - 4 + 2x$$
$$M = 2$$

6. Calcular la suma de todos los valores enteros de x que verifiquen la inecuación $\sqrt{2x-5} < 3$.

Solución:

1.° $2x - 5 \geq 0$

$$x \geq \frac{5}{2}$$

Para los ejercicios siguientes, debe tener claras las técnicas de factorización.

2.° $\sqrt{2x-5}<3$. Al cuadrado:

$\left(\sqrt{2x-5}\right)^2<(3)^2$

$2x - 5 < 9$

$2x < 14$

$x < 7$

$x \in |2.5; 7\rangle$ C.S. = $\{3, 4, 5, 6\}$

Por lo tanto, la suma de los valores es 18.

7. Al resolver $\sqrt{x^2-4x+3} < \sqrt{x^2-7x+12}$, se logra una solución de la forma $\langle -\infty; m|$. Hallar el valor de m.

Solución:

$x^2 - 4x + 3 = 0$ $\quad$ $x^2 - 7x + 12 = 0$

$(x - 3)(x - 1) = 0$ $\quad$ $(x - 3)(x - 4) = 0$

$\Rightarrow x \in \langle -\infty; 1| \cup |3; \infty\rangle$ $\quad$ $\Rightarrow x \in \langle -\infty; 3| \cup |4; \infty\rangle$

Ahora resolveremos la inecuación:

$\sqrt{x^2-4x+3} < \sqrt{x^2-7x+12}$ Al cuadrado.

$x^2 - 4x + 3 < x^2 - 7x + 12$

$3x < 9$

$\Rightarrow x < 3$

Intersectando los intervalos, $x \in \langle -\infty; 1|$

Por lo tanto, $m = 1$

8. Resolver:

$\sqrt{4x-1}-\sqrt{8-x}<0$

No eleve al cuadrado directamente. Mejor ubique una raíz en cada miembro de la ecuación.

Solución:

$4x - 1 \geq 0$ $\quad$ y $\quad$ $8 - x \geq 0$

$x \geq 1/4$ $\quad$ $8 \geq x$

Por lo tanto,

$x \in [1/4; 8]$

Ahora, de la inecuación principal: $\sqrt{4x-1}-\sqrt{8-x}<0$

$\sqrt{4x-1}<\sqrt{8-x}$

Elevando al cuadrado: $4x - 1 < 8 - x$

$5x < 9$

$x < 9/5$

Intersectando con el campo de definición:

$$x\in\left[\frac{1}{4};\frac{9}{5}\right]$$

9. Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$\sqrt{3-x}<\sqrt{2x-1}$

Solución:

$3 - x \geq 0$ y $2x \geq 0$

$3 \geq x$ $\quad 2x \geq 1 \rightarrow x \geq 0{,}5$

La intersección es: x pertenece al intervalo [0,5; 3].
Elevando ahora al cuadrado la inecuación principal:

$3 - x < 2x - 1 \qquad (+x+1)$

$4 < 3x \qquad (:3)$

$4/3 < x$

Ahora, intersectando con el conjunto de definición, x pertenece a
[4/3; 3].

10. $\sqrt{|2x+9|} \geq \sqrt{x^2+4x+5}.$

Solución:

$\rightarrow 2x + 9\ 0(-(9)\ y :2)$ y $x^2 + 4x + 5 \geq 0$

$x \geq -9/2$ y $x \in R$

Por lo tanto, la intersección
$x \geq -9/2$

Ahora, levantando las raíces, tenemos:
$|2x - 9|\ \ x^2 + 4x + 5$ y por propiedadd $|b| > a \rightarrow b > a \vee b < -a$

I. $2x - 9 \geq x^2 + 4x + 5$

$0 \geq x^2 + 2x + 14$

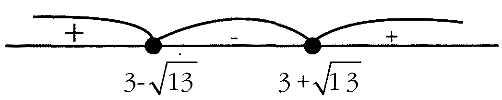
$0 \geq (x + 1)2 + 13 \rightarrow$ siempre ≥ 0

Por lo tanto, $x \in \{\ \}$

II. $2x - 9 \leq -(x^2 + 4x + 5)$

$x^2 + 6x - 4 \leq 0$

$\left(x-3+\sqrt{13}\right)\left(x-3-\sqrt{13}\right) \leq 0$



Por lo tanto, $\left[3-\sqrt{13};3+\sqrt{13}\right]$.

Ejercicios propuestos

1. Resolver $|2x-9| > \dfrac{4x+5}{3}.$

R. $x \in \left\langle -\infty;\dfrac{11}{5}\right\rangle \cup \left[16;+\infty\right\rangle$

2. Resolver: $|2x + 2| < 5$
R. <-7/2; 3/2>

3. Resolver: $|x^2 - 5x + 5| < 1$
R. <1; 2> < <3; 4>

4. Resolver: $\left|\dfrac{4}{(x-3}\right| < 1$
R. C.S. = <7; + ∞>

5. Hallar los posibles valores de x: $|2x - 3| > |(x + 2) / 4|$
R. $x \in$ <-∞; 10/9> ∪ <2; ∞>

6. Resolver $\left|\dfrac{x}{3}\right| \leq \left|\dfrac{x-5}{4}\right|$.
R. [-15; 15/7]

7. Resolver: $\sqrt{x^2 - 25} > -30$ y dar el mayor valor negativo de x.
R. -5

8. Hallar el mayor valor entero positivo de x que cumpla con
$\sqrt{x^2 - 3} \leq \sqrt{2x}$
R. 3

9. Hallar los valores posibles para x en $\sqrt{x-4} + \sqrt{7-x} \leq 0$
R. [4; 7]

10. Resolver: $\sqrt{|x-5|} < \sqrt{2x-1}$
R. $\left\langle \dfrac{4}{3};\ \infty \right\rangle$

11. Resolver: $\sqrt{x^2 - 2x - 15} \geq 2 - x$
R. $\left[\dfrac{19}{2};\ \infty \right\rangle$

12. Resolver: $\sqrt{x+1} > 1$
R. $x > 0$

13. Resolver: $\sqrt{x^2 - 1} \geq 3$
R. $x \in \left[-\infty; -\sqrt{10}\right] \cup \left[\sqrt{10}; \infty\right]$

Revise la teoría y los ejercicios resueltos.

Debe resolver dichos ejercicios antes de pasar a los ejercicios propuestos.

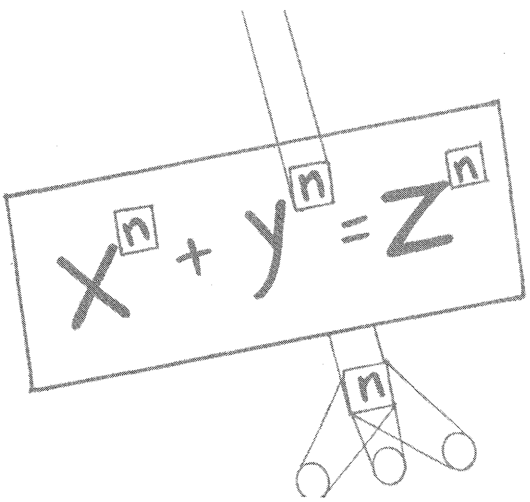
14. Para una compañía que fabrica microchips de computador el costo combinado de mano de obra y material es de $21 p microchip. Los costos fijos son $70 000. Si el precio de venta un microchip es $35. ¿Cuántos debe vender para que la compañ genere utilidades?
R. 5001 microchips

15. Un agricultor debe decidir entre rentar o comprar un tractor agrícola Si fuese a rentar la máquina, el costo de la renta sería de $300 mensuales (sobre la base de un año) y el costo diario (combustible aceite, operador) sería de $180 por cada día que la máquina se utilizara. Si el fuese a comprarla, sus costos fijos anuales serían de $20 000 y los costos diarios de operación y mantenimiento serían de $230 por cada día que la máquina se utilizara. ¿Cuántos días al año, por lo menos, tendría que utilizar el agricultor la máquina para justificar la renta en lugar de la compra?
R. 321 días

16. Una compañía de publicidad determina que el costo por publicar cada ejemplar de una cierta revista es de $1,50. El ingreso recibido de los distribuidores es $1,40 por revista. El ingreso por publicidad es 10% de los ingresos recibidos de los distribuidores por todos los ejemplares vendidos por encima de 10 000. ¿Cuál es el número mínimo de revistas que deben venderse de modo que la compañía obtenga utilidades?
R. 35 001 revistas.

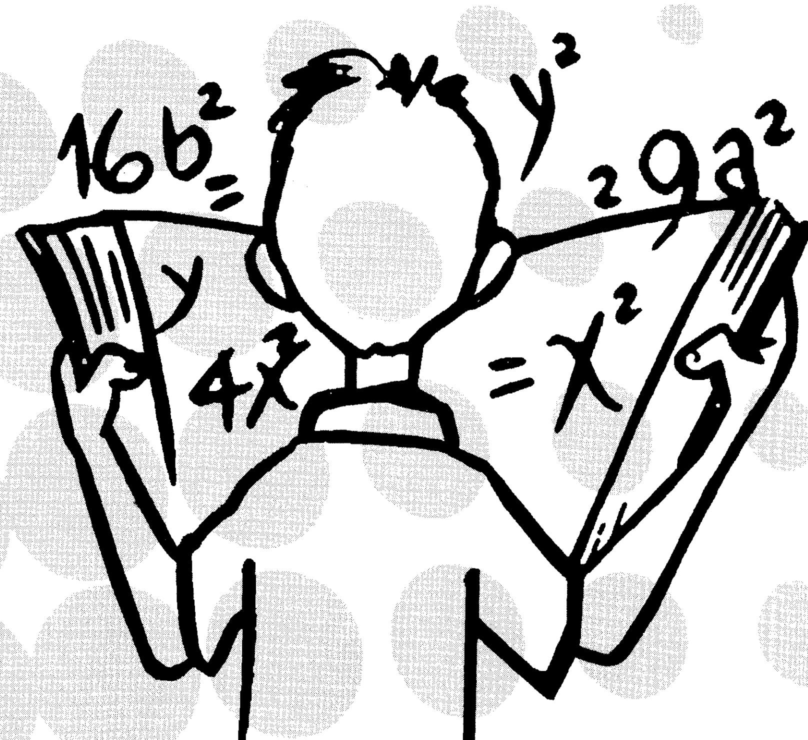
17. Una compañía fabrica un producto que tiene un precio unitario de venta de $20 y un costo unitario de $15. Si los costos fijos son de $600 000, determine el número mínimo de unidades que deben venderse para que la compañía tenga utilidades.
R. 120 001

18. Actualmente, un fabricante tiene 2500 unidades de un producto en inventario. Hoy, el precio unitario del producto es $4 por unidad. El próximo mes, el precio del producto se incrementará en $0,50. El fabricante quiere que el ingreso total recibido por la venta de las 2500 unidades no sea menor que $10 750. ¿Cuál es el número máximo de unidades que pueden venderse este mes
R. 1000



UNIDAD IV

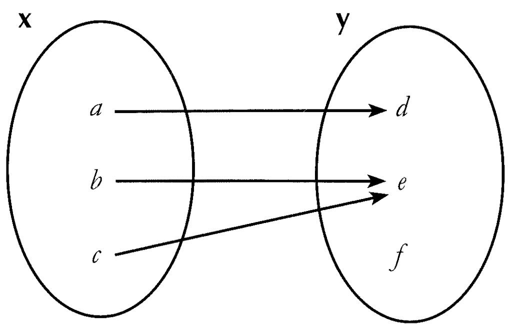
Funciones Reales de Variable Real



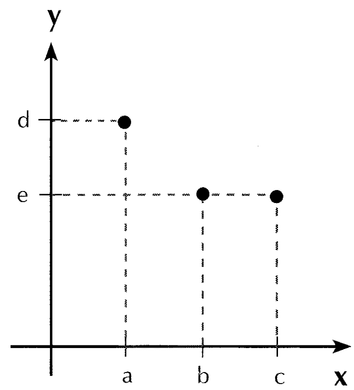
Capítulo 10
FUNCIONES

10.1 Definición

Una función es una relación entre dos conjuntos numéricos, uno de entrada y otro de salida, de tal manera que a cada elemento del conjunto de entrada le corresponde un único elemento en el conjunto de salida. Las funciones con las que trabajaremos en este capítulo son funciones en R, es decir, funciones cuyos conjuntos están incluidos en el conjunto de los números reales.



Dominio: valores de X Rango: valores de Y



Si asociamos cada elemento del conjunto X con su correspondiente elemento del conjunto Y, tendremos las siguientes parejas:

$$(a; d), (b; e), (c; e).$$

A cada una de estas parejas las llamaremos par ordenado. Un par ordenado tiene un primer elemento correspondiente a un valor de x y un segundo elemento correspondiente a un valor de y.

Observe que a cada valor de x le corresponde un único valor de y, a pesar de que hay valores de y que corresponden a varios valores de x.

Como sabe, cada par ordenado corresponde a su vez a un punto en un plano cartesiano.

10.2 Regla de correspondencia

La regla de correspondencia de una función es una expresión algebraica que relaciona sus variables. Así, decir que para cada valor de

- Y depende de X
- Y está en función de X

x existe un valor de y, significa que y está en función de x; es decir que si a una determinada expresión algebraica le asignamos un valor para x, obtendremos un valor para y:

$$Y = f(x)$$

Ejemplos:

1. $f(x) = 2x + 5$

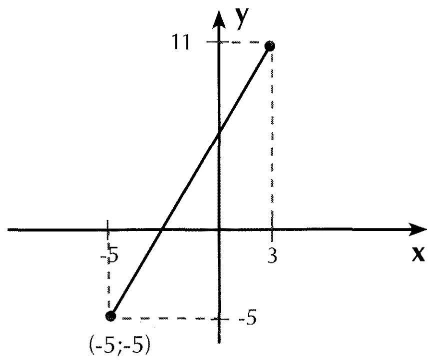
Para cada valor de x, obtendremos un valor de y (es decir, de $f(x)$).

x	$y = 2x + 5$
3	11
-5	-5
0,4	5,8

Así, obtenemos los siguientes pares ordenados:

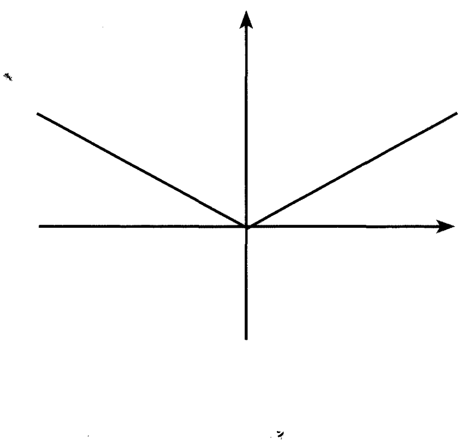
(3; 11), (-5; -5), (0,4; 0,8)

En este caso, los valores de x los hemos dado de manera discreta (es decir, de uno en uno). Pero si los damos de manera continua en un intervalo, obtendremos una curva en el plano (en este caso, es una recta).



Los valores que toma la variable x pertenecen al intervalo [-5; 3] y los valores de la variable y pertenecen al intervalo [-5; 11].

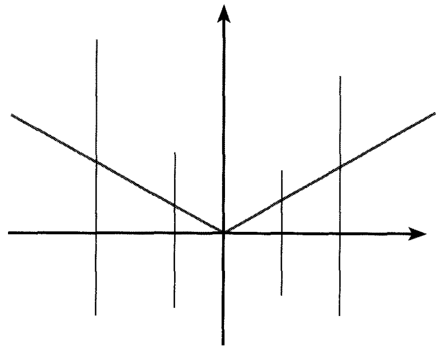
2. Verifique si la siguiente gráfica es o no una función.



Solución:

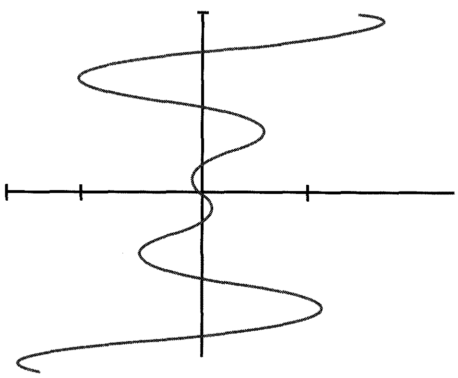
Haremos cortes mediante rectas verticales. Si se llega a cortar en más de un punto a la gráfica de la relación, entonces no es función.

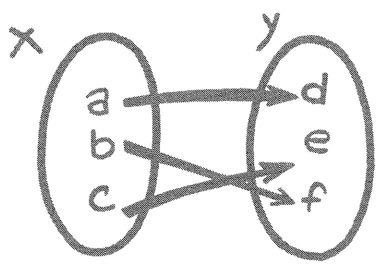
De la siguiente manera:



Observe que no hay ningún lugar por donde se corte verticalmente a la gráfica en dos puntos. Por lo tanto, es una función.

3. Verifique si es o no función la siguiente relación:

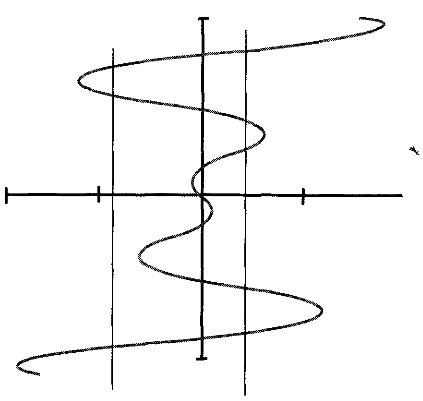




Solución:

Haremos cortes mediante rectas verticales. Si llegan a cortar en más de un punto a la gráfica de la relación, entonces no es función.

De la siguiente manera:

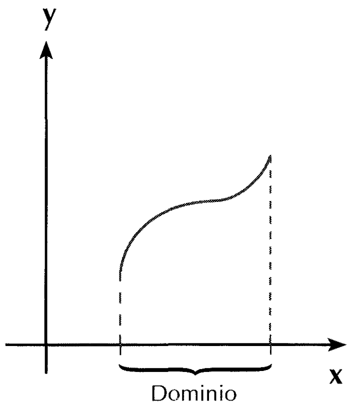


Recuerde:

No es función de «x», pero sí verifica ser función de «y».

Ya que las rectas verticales cortan en dos o más puntos a las curvas, se concluye entonces que las gráficas no corresponden a funciones.

10.3 Dominio de una función



El dominio de una función es el conjunto en el cual la función está definida. Se representa por *Dom f.* Todos los valores que puede tomar x pertenecen al dominio de la función.

En algunos casos, el dominio de la función está dado; en otros, se asume que el dominio es el conjunto de los números reales, pero con restricciones que pueden deducirse de la regla de correspondencia.

Ejemplos:

1. Halle el dominio de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+3x-4}$$

Solución:

En la función, se tiene un denominador; por lo tanto,

$x^2 + 3x - 4 \neq 0$ Factorizando

$\Rightarrow (x+4)(x-1) \neq 1$

$\Rightarrow x \neq -4$ y $x \neq 1$

$\therefore$ $Dom f = R - \{-4; 1\}$ (es decir, x puede ser cualquier número real excepto -4 y 1)

2. $g(x) = \sqrt[4]{x+9}$

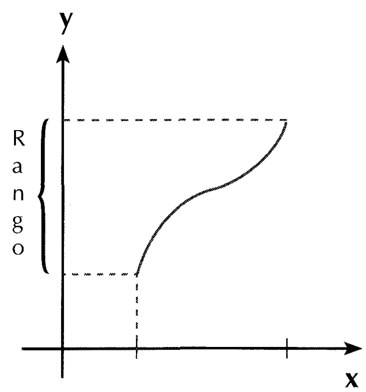
Solución:

Se tiene una raíz con índice par (4), por lo que

$x + 9 \geq 0$

$\Rightarrow x \geq -9$

Por lo tanto, $Dom\ g = [-9; +\infty>$



10.4 Rango de una función

El rango de una función es el conjunto de valores que toma la función cuando se le ingresan los valores de x. En otras palabras, es el intervalo al que pertenecen los valores de la variable y. Se representa por *Ran f.* El rango de la función se deduce a partir de los valores del dominio.

Ejemplos:

Halle el rango de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^2 + 3$

Solución:

Sabemos que: $\forall x \in R;\ x^2 \geq 0$

$$x^2 \geq 0 \quad (+3)$$
$$x^2 + 3 \geq 3$$
$$f(x) \geq 3$$

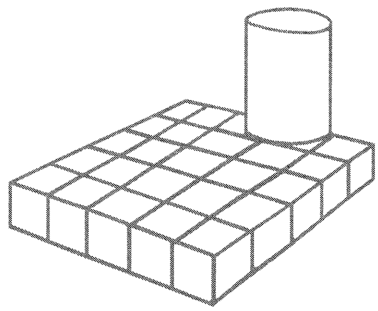
$\therefore$ *Ran* $[3; \infty>$

2. $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$

Solución:

Sabemos que $\forall x \in R;\ x^2 \geq 0$

$$x^2 \geq 0$$
$$x^2 + 9 \geq 9$$
$$\sqrt{x^2+9} \geq \sqrt{9}$$
$$\sqrt{x^2+9} \geq 3 \qquad \text{pero} \qquad f(x) = \sqrt{x^2+9}$$
$$f(x) \geq 3$$

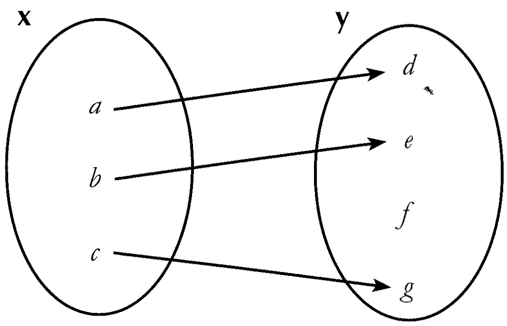


$\therefore$ *Ran* $[3; \infty>$

10.5 Tipos de funciones

10.5.1 Función inyectiva

Son funciones inyectivas aquellas en las que un valor de y corresponde a un único valor de x.



En este caso, en los pares ordenados no se repiten los valores de y. Sin embargo, existen valores de y (en este caso, la letra f) que no poseen un x.

Ejemplos

1. Verifique si la siguiente función es inyectiva: $f(x) = x^2 - 9$

   Solución:

   Analíticamente, la condición de inyectividad se verifica si

   $$f(x_0) = f(x_1) \quad \text{si y sólo si} \quad x_0 = x_1.$$

   Ahora $\quad x_0^2 - 9 = x_1^2 - 9$

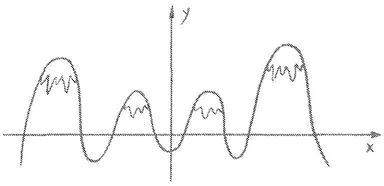
   $$x_0^2 = x_1^2$$

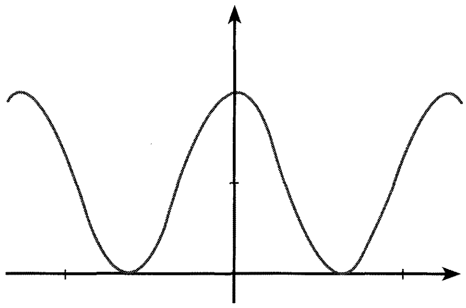
   Por tanto, $\quad x_0 = x_1 \ \vee \ x_0 = -x_1$

   Lo que quiere decir que existen dos posibles valores para x_0.

   $\therefore$ La función no es inyectiva.

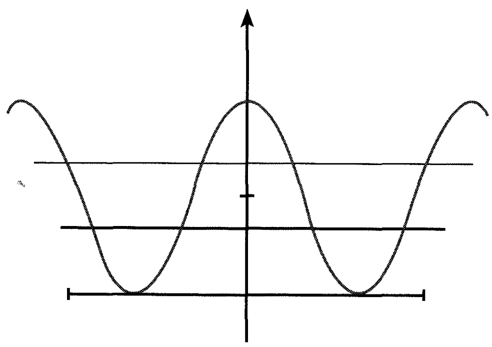
2. A partir del gráfico, determine si la función es inyectiva o no.





   Solución:

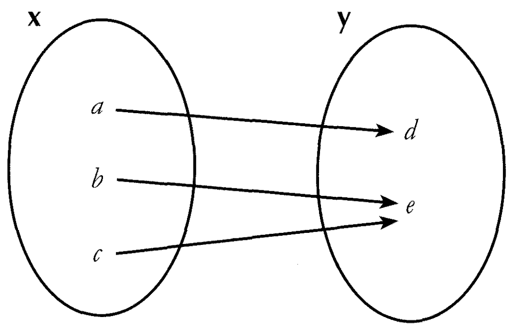
   Bastará con trazar rectas horizontales. Si cualquiera de estas rectas corta en dos o más puntos a la grafica de la función, entonces la función en estudio no será inyectiva.



   La función es cortada en dos o más puntos. Por tanto, no es inyectiva.

10.5.2 Función sobreyectiva

Son funciones sobreyectivas aquellas en las que a todos los valores del rango les corresponde uno o más valores del dominio. Es decir, funciones en las que a todos los valores de y les corresponde uno o más valores de x:



Ejemplos:

1. Determinar si la función $f(x) = x^2 - 8x + 26$ es sobreyectiva si

$$f = [-2,5] \rightarrow [14,20]$$

Solución:

La función será sobreyectiva si y sólo si el rango es igual al conjunto de llegada $Ran\, f(x) = [14; 20]$. En nuestro caso, veamos:

F: $x^2 - 8x + 26 = (x - 4)^2 + 10$

$\forall a \in R \Rightarrow a^2 \geq 0$

$(x - 4)^2 \geq 0 \qquad (+10)$

$(x - 4)^2 + 10 \geq 10$

Pero como $f(x) = (x - 4)^2 + 10$; por tanto, $f(x) \in [10, \alpha>$
$[10; \alpha> \neq [14; 20]$

$\therefore$ La función no es sobreyectiva

Como $(x - 4)^2$ es siempre positivo, si le aumentamos 10, tendremos que la función será siempre mayor o igual a 10. Esto nos da un rango igual a $[10; \alpha]$

10.5.3 Función biyectiva

Una función es biyectiva cuando es sobreyectiva e inyectiva a la vez.

Ejemplos:

1. Verifique si la función es o no biyectiva

$$f(x) = x^2 - 10x + 25, \quad \text{donde} \quad x \in [0,5] \rightarrow [10;15]$$

Solución:

Para que una función sea biyectiva, debe ser inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo. Verifiquemos:

a. Inyectiva

Una función es inyectiva si $f(x1) = f(x_0)$ si y solo si $x_0 = x_1$.

Veamos: $x_0^2 - 10x_0 + 25 = x_1^2 - 10x + 25$

$(x_0 - 5)^2 = (x_1 - 5)^2$

$(x_0 - 5) = \pm(x_1 - 5) \Rightarrow x_0 - 5 = x_1 - 5 \ldots(a)$ o

$x_0 - 5 = -x_1 + 5 \ldots(b)$

De (a) $x_0 = x_1$ De (b) $x_0 = -x_1 + 10$

$\therefore$ Por lo tanto, (b): es inyectiva.

b. Sobreyectiva

Veamos el rango: $x \in [0;5\,] \Rightarrow 0 \leq x \leq$

$-5 \leq x - 5 \leq 10$

$25 \leq (x - 5)^2 \leq 100$

como $f(x) = (x - 5)^2$

$\Rightarrow 25 \leq f(x) \leq 100 \ldots Rang(f) = [25; 100]$

Dado que $[25; 100] \neq [10; 15]$, la función no es sobreyectiva.

En conclusión, la función no es biyectiva.

10.6 Funciones elementales

10.6.1 Función lineal

Vea, más adelante, el capítulo correspondiente a las rectas.

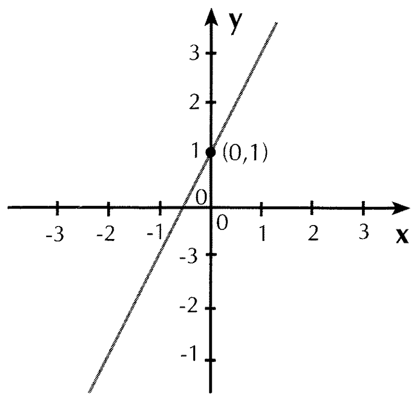
Una función lineal es una función de la forma $f(x) = mx + b$. Sabemos, por lo visto en geometría analítica, que la gráfica de una función lineal es una recta en el plano, donde m representa la pendiente y el punto $(0; b)$ es el punto de corte con el eje Y.

A menos que se dé una restricción, el dominio y el rango de una función lineal será siempre el conjunto de los números reales.

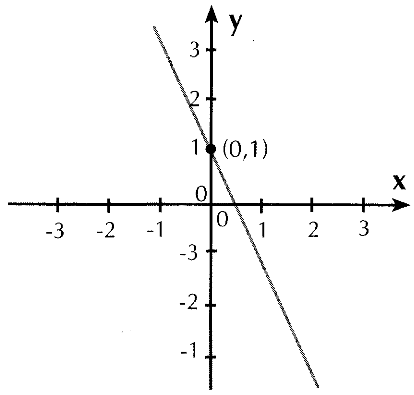
$f(x) = mx + b;$
$Dom\, f: R$
$Ran\, f: R$

Ejemplos de funciones lineales:

1. $f(x) = 2x + 1$



2. $f(x) = -2x + 1$



10.6.2 Función cuadrática

Una función cuadrática es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ donde } a \neq 0.$$

Sabemos, por lo visto en geometría analítica, que la gráfica de una función cuadrática es una parábola con vértice $(h; k)$, donde $h = -\dfrac{b}{2a}$, k se obtiene reemplazando el valor de h en la función.

A menos que se dé una restricción, el dominio de la función cuadrática será siempre el conjunto de los números reales. El rango será el conjunto de los números reales mayores o iguales a k.

Vea, más adelante, el capítulo sobre las parábolas.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Dom f: R

Ran f: $[k; \infty>$

Recuerde:

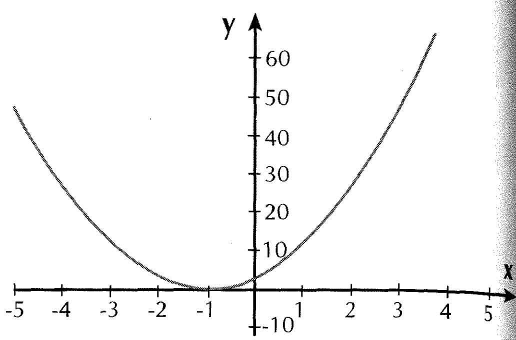
Las coordenadas del vértice se hallan aplicando

$$\left(\frac{-b}{2a};f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$$

Ejemplos de funciones cuadráticas:

1. $f(x) = 3(x+1)^2$

$h = 1$
$k = 0$

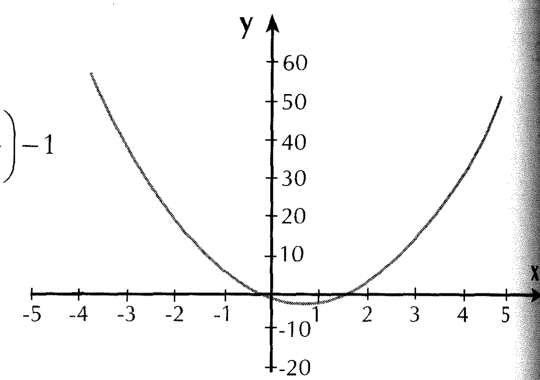


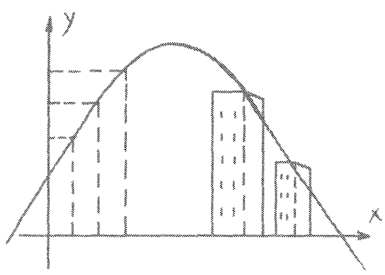
2. $f(x) = 3x^2 - 4x - 1$

$$h = -\frac{(-4)}{2.3} = \frac{2}{3}$$

$$k = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) - 1$$

$$k = \frac{-7}{3}$$





10.6.3 Función polinómica

Una función polinómica es una función de la forma

$$f(x) = P(x)\ a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n,$$

donde n es el grado de la función. Así, los dos casos que acabamos de ver son casos particulares de esta forma general. La función es lineal cuando $n = 1$ y cuadrática cuando $n = 2$.

En general, el dominio de la función es el conjunto de todos los reales, y el rango depende del valor de n. Si n es par, el rango será el conjunto de los reales mayores o iguales a un determinado valor k. En cambio, si n es impar, el rango será el conjunto de todos los números reales.

$f(x) = a_0x^n + a^1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$

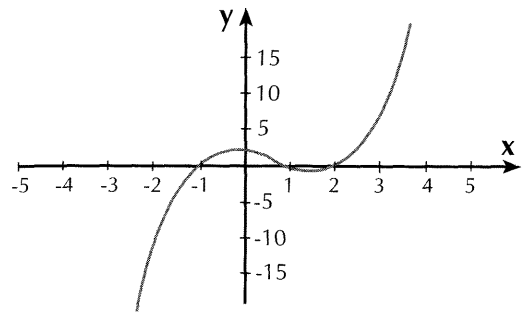
Dom f: R

Si n es impar: *Ran f*: R

Si n es par: *Ran f*: [k; ∞>

1. Gráfico de una función con n impar:

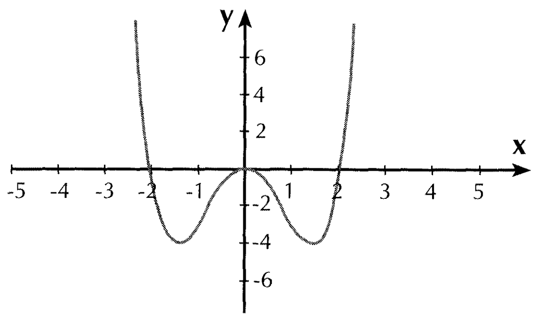
$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$



> **Recuerde:**
> El uso de los puntos críticos de las inecuaciones nos ayuda a conocer en qué zonas la función es positiva o no.

2. Gráfico de una función con n par:

$f(x) = x^4 - 4x^2$



10.6.4 Función racional

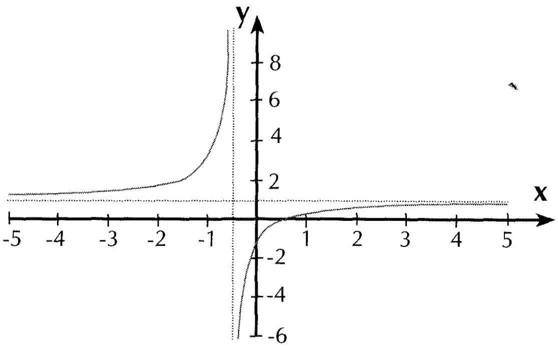
Una función racional es aquella que se obtiene de dividir dos polinomios. Tiene la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \text{ con } Q(x) \neq 0.$$

El dominio de esta función es el conjunto de todos los números que no anulen el denominador.

Gráficos de funciones racionales:

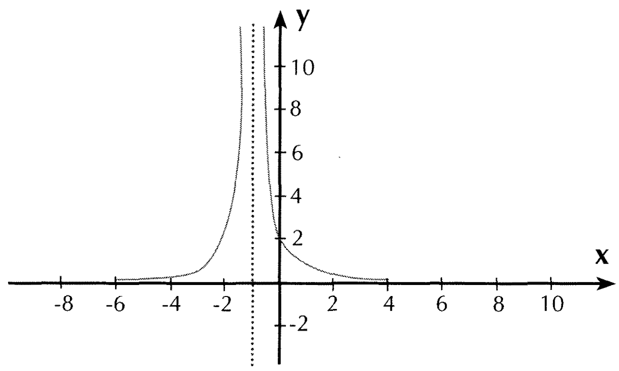
1. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$



> Debe restringir el dominio para evitar que el denominador sea cero.

Observe que la gráfica no pasa por x = -1, ya que para este valor la función sería $\frac{1}{2}$, lo cual no está permitido.

2. $f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$



10.6.5 Función irracional

Una función irracional es una función de la forma

$$f(x) = \sqrt[n]{P(x)} + Q(x),$$

es decir, aquella cuya regla de correspondencia contiene un radical. También podemos definirla como una función polinómica de exponente fraccionario. Si el índice de la raíz es par, el dominio de la función será el conjunto de los reales positivos; asimismo, el rango también será el conjunto de los reales positivos. Si el índice de la raíz es impar, el dominio de la función será el conjunto de los números reales y el rango también.

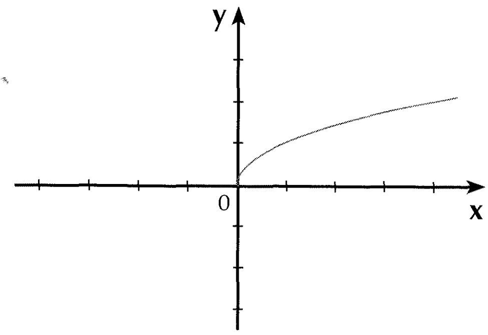
$f(x) = \sqrt[n]{P(x)} + Q(x)$

Si n es par
Dom f: [0; ∞>
Ran f: [0; ∞>

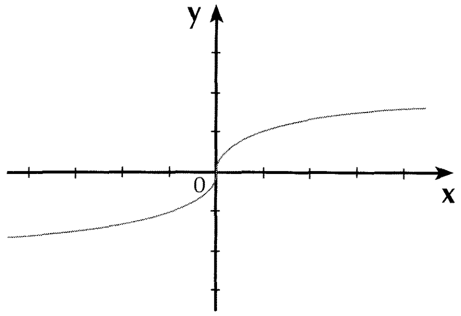
Si n es impar
Dom f: R
Ran f: R

Ejemplos de gráficos de funciones irracionales:

1. $f(x) = \sqrt{x}$



2. $f(x) = \sqrt[3]{x}$



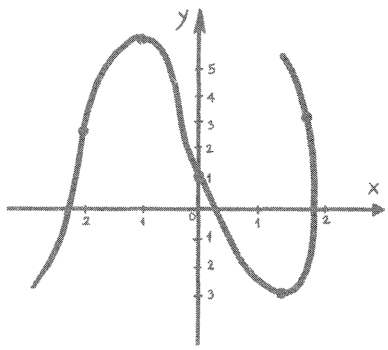
Ejercicios resueltos

1. Calcule el dominio y el rango de la siguiente función:

$$f(x) = x^2 + 25$$

Solución:

El dominio: no existen valores para los cuales esté restringido el valor de x; es decir, x puede tomar cualquier valor real.



$\therefore$ $Dom\, f \in R$

El rango: sabemos que $\forall x \in \Re : x^2 \geq 0$

$$x^2 \geq 0 \qquad (+25)$$
$$x^2 + 25 \geq 25$$
$$\text{y como } f(x) = x^2 + 25$$
$$f(x) = 25$$

$\therefore$ $Ran\, f$: $[25;\alpha>$

2. Calcule el dominio y el rango de la siguiente función:

$$f(x) = x^2 + 4x + 4$$

Solución:

Factorizando tenemos:

$$f(x) = (x + 2)^2$$

El dominio: no existen valores para los cuales esté restringido el valor de x; es decir, x puede tomar cualquier valor real.

$\therefore$ $Dom\, f$:R

El rango: sabemos que $\forall a \in \Re : a^2 \geq 0$

$$\therefore\ (x+2)^2 \geq 0 \text{ y como } f(x) = (x+2)^2$$

$$f(x) \geq 0$$

$\therefore$ *Ran f*: [0;∞>

3. Calcular el dominio y el rango de la función: $f(x) = 1 - \sqrt{x+2}$

Solución:

El dominio está restringido para los valores de x que satisfagan $x + 2 \geq 0$ (condición de existencia de la raíz cuadrada)
$x \geq -2$

$\therefore$ *Dom f* ∈: [-2; ∞>

El rango: sabemos que $x \geq 2$ (+2)

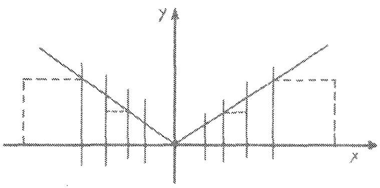
$$x + 2 \geq 0$$

$$\sqrt{x+2} \geq 0 \quad (-1); +1$$

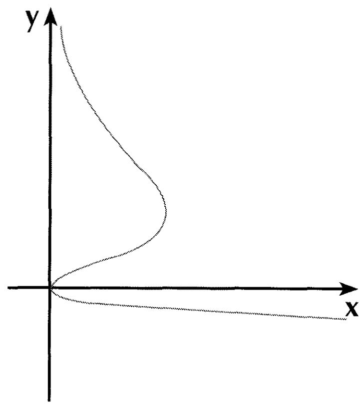
$$1 - \sqrt{x+2} \leq 1 \quad \text{y como} \quad f(x) = 1 - \sqrt{x+2}$$

$$f(x) \leq 1$$

$\therefore$ *Ran f*:]∞; 1]

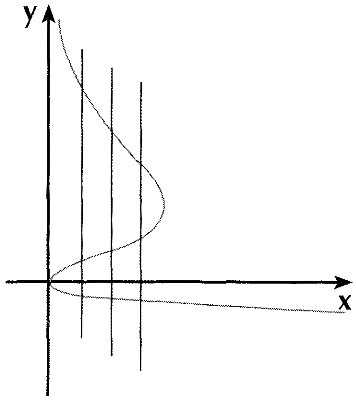


4. Indique si las siguientes gráficas corresponden a una función.



Solución:

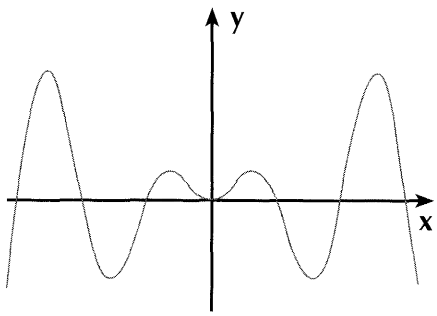
Para determinar si la gráfica corresponde a una función, trazamos rectas verticales. Si estas cortan en dos o más puntos a la gráfica entonces no corresponde a una función.

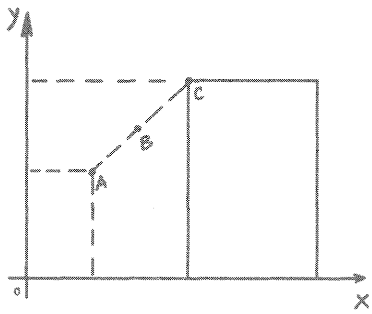


En este caso, las rectas verticales cortan a la gráfica en más de un punto.

Por lo tanto, la gráfica no corresponde a una función.

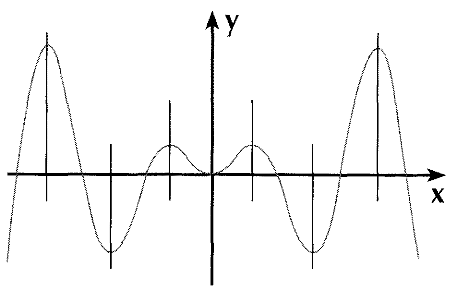
5.





Solución:

Para determinar si la gráfica corresponde a una función, trazamos rectas verticales. Si estas cortan en dos o más puntos a la gráfica, entonces no corresponde a una función.



En este caso, las rectas verticales cortan a la gráfica en sólo un punto.

Por lo tanto, la gráfica representa una función.

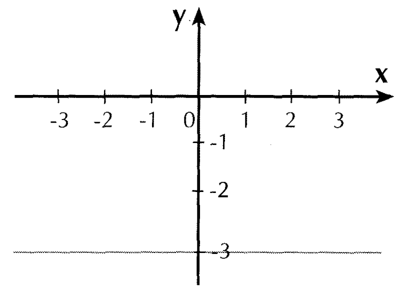
6. Dada la función $f(x) = -3$, determine su dominio y su rango, y grafíquela.

Solución:

Dom f = <-∞; ∞>

Ran f = {-3}

La gráfica es una recta paralela al eje x y corta al eje y en -3.

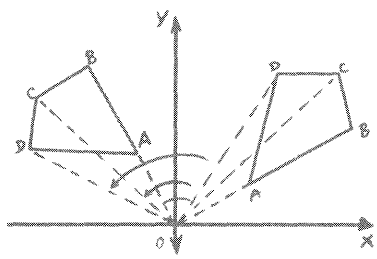


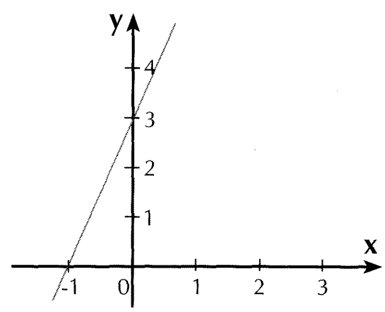
7. Dada la función $f(x) = 3x + 3$, determine su dominio y su rango, y grafíquela.

Solución:

Dom f = ∴ <-∞; ∞>

Ran f = <-∞; ∞>





La gráfica es una recta de pendiente 3 que intercepta al eje y en 3.

8. Grafique y halle el dominio y el rango de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2$$

Solución:

Dom f = <-∞; ∞>

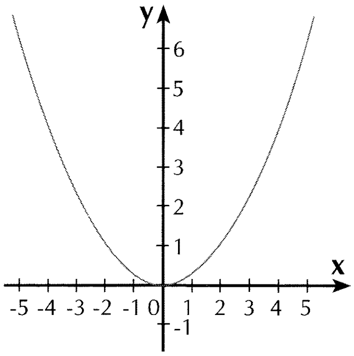
Como $\frac{1}{4} > 0$, la parábola se abre hacia arriba.

Como $b = 0$, la abcisa del vértice es $x = 0$.

$$f(0) = 0$$

∴ El vértice es (0;0).

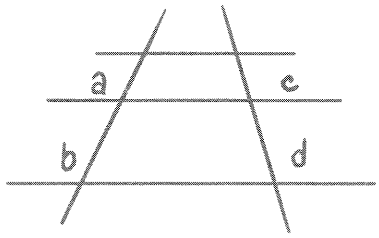
Como la parábola se abre hacia arriba, se deduce que *Ran f* = [0; ∞>



9. Grafique y halle el dominio y el rango de la siguiente función:

$$f(x) = -2x^2 + 3x$$

Solución:



Esta función está definida para todos los valores de x en los números reales.

$\Rightarrow$ *Dom f* = <-∞; ∞>

Como -2 <0, la parábola se abre hacia abajo.

Hallemos las coordenadas del vértice:

$h = -\dfrac{b}{2a}$, $\quad a = -2 \quad$ y $\quad b = 3$

$$\Rightarrow h = -\frac{3}{2(-2)} = \frac{3}{4}$$

$$k = f(3/4) = 2(3/4)^2 + 3(3/4)$$

$$\Rightarrow f(3/4) = -9/8 + 9/4 = 9/8 \;\Rightarrow\; k = 9/8$$

$\therefore$ El vértice coordenado es (3/4;9/8).

Como la parábola se abre hacia abajo, se deduce que

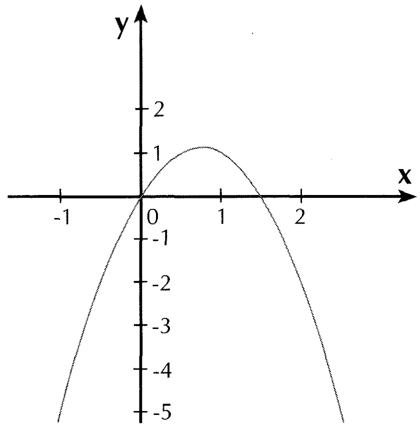
Rang f = <-∞; 9/8]

La gráfica de f corta al eje y en (0;0)

Hallemos los interceptos con el eje x:

$$-2x^2 + 3x = 0 \quad \leftrightarrow \quad -x(2x - 3) = 0$$

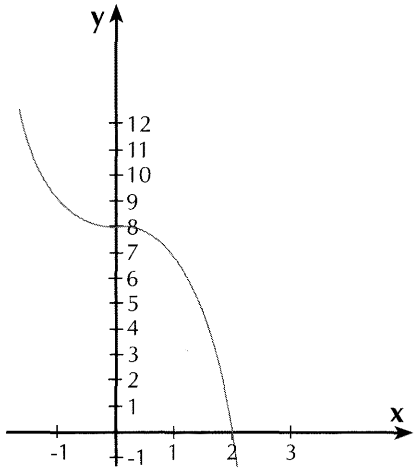
$x = 0$ o $x = 3/2$. La gráfica corta al eje en (0;0) y en (3/2;0).



10. Grafique la siguiente función indicando su dominio y su rango.

$$f(x) = -x^3 + 8$$

Solución:



De la regla de correspondencia, tenemos:

Se observa que no hay restricciones para el dominio.

$\therefore$ *Dom f* = <-∞;∞>

Rang f = <-∞;∞>

La gráfica corta al eje y en 8.

$$-x^3 + 8 = 0$$
$$x^3 = 8$$
$$\therefore \quad x = 2$$

La gráfica corta al eje x en 2.

11. Determine la función polinómica $f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$.

Solución:

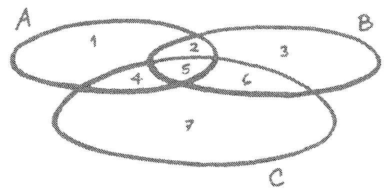
Dado que no hay valores restringidos para x, tenemos:

Dom f: $<-\infty;\infty>$

A continuación, hallaremos los cortes del eje x.

$x^5 - 5x^3 + 4x = 0$ factorizamos

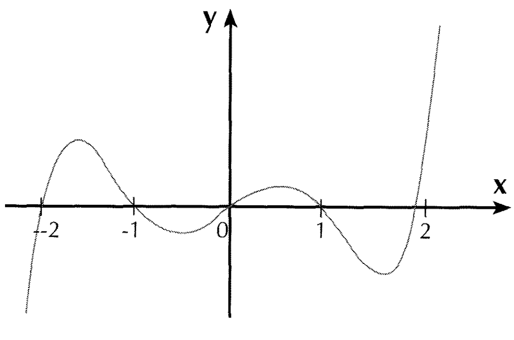
$x(x - 1)(x + 1)(x + 2)(x - 2) = 0$



Por tanto, las raíces o cortes con el eje x serán $x = 1;-1;-1;2;-2;0$

Además,

Rang f = $<-\infty;\infty>$



12. Determine el dominio y el rango de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

Solución:

El dominio: notamos que existe un denominador, por lo que restringiremos el dominio para evitar la división entre cero.

Dom f: R - {0}

Rang f: $<-\infty;\infty>$

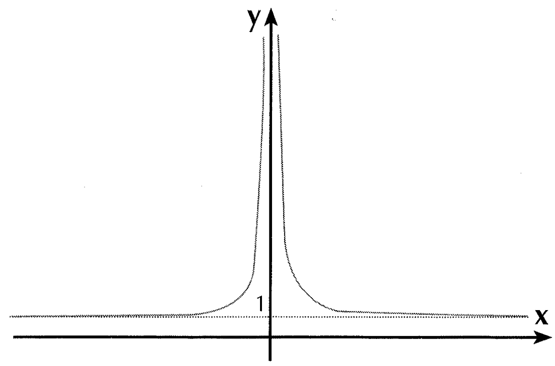
13. Determine el dominio y el rango de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

Solución:

El dominio: notamos que existe un denominador, por lo que restringiremos el dominio para evitar la división entre cero.

Dom f: R - {0}

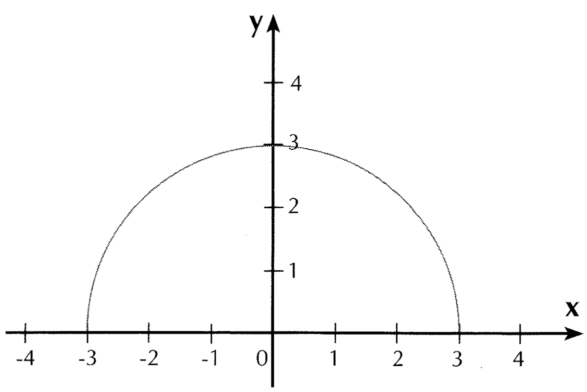
Rang f: <-1;∞>, donde se aprecia que 1 es una asíntota de la función.



Se emplea el método de los puntos críticos para conocer la gráfica de esta función.

14. Sea la función irracional $f(x) = \sqrt{9-x^2}$, grafíquela y analícela.

Solución:



Para el dominio:

Resolveremos la siguiente desigualdad.

$9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow (3 - x)(3 + x) \geq 0$

$(x - 3)\ (x + 3) \leq 0$

Recuerde el acápite 7.3 correspondiente a la recta real y los intervalos.

Por el criterio de los puntos críticos:

$x \in [-3;3] \quad \leftrightarrow \quad Dom\,f$: $[-3;3]$

Para el rango:

$x \in [-3;3] \quad \leftrightarrow \quad -3 \leq x \leq 3 \qquad ()^2$

$0 \leq x^2 \leq 9 \qquad (x - 1)$

$-9 \leq -x^2 \leq 0 \qquad (+9)$

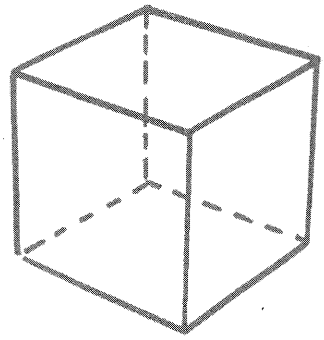
$0 \leq 9 - x^2 \leq 9$

$0 \leq \sqrt{9-x^2} \leq 3$ y como $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

$0 \leq f \leq 3$

$\therefore$ *Rang*: $[0;3]$

15. Dada la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$, grafíquela y analícela.



Solución:

Para hallar el dominio, debemos resolver la siguiente desigualdad:

$x^2 - 3x - 4 \geq 0$ factorizando

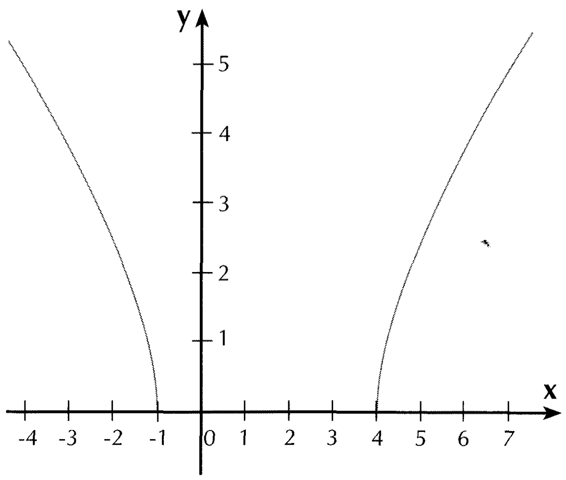
$\Rightarrow (x - 4)(x + 1) \geq 0$

Por medio de los puntos críticos, tenemos:

$x \in \langle -\infty;-1] \cup [4; \infty\rangle$

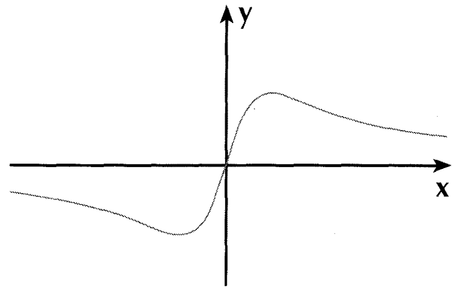
Por tanto el dominio: *Dom f*: $\langle -\infty;-1] \cup [4; \infty\rangle$

El rango: *Ran f*: $[0; \infty\rangle$



Ejercicios propuestos

1. Analice si el siguiente gráfico pertenece a una función.

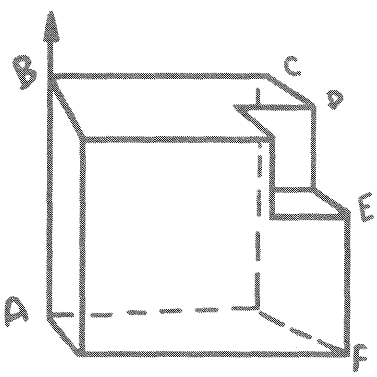


R. Sí, pertenece.

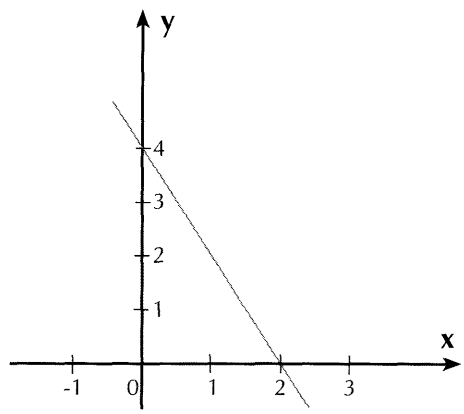
2. Sea la función $f(x) = -2x + 4$, analice la función lineal y defina su dominio y su rango.

R. $Dom\,f = <-\infty;\infty>$

$Ran\,f = <-\infty;+\infty>$



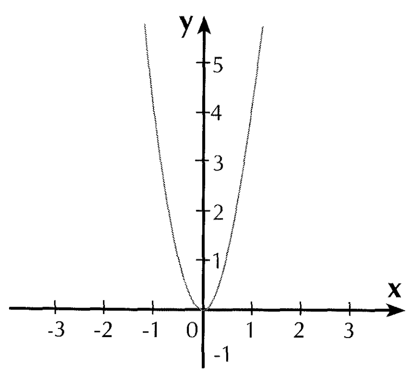
La pendiente de la gráfica es -2 y corta al eje y en $y = 4$.



3. Grafique y halle el dominio y el rango de la siguiente función:

$f(x) = 4x^2$

R. $Dom\,f = <-\infty;+\infty>$



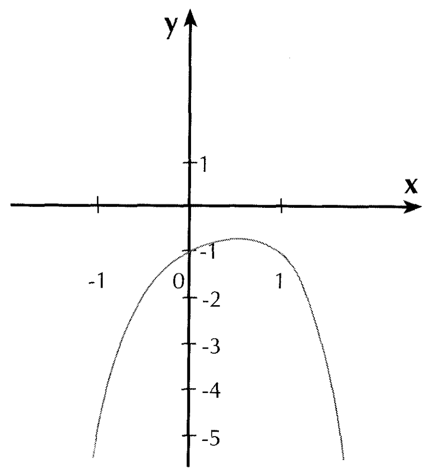
4. Grafique; luego, halle el dominio y el rango de la siguiente función:

$f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

R.

Dom f = <-∞;+∞>

Ran f = <-∞; -0,6>

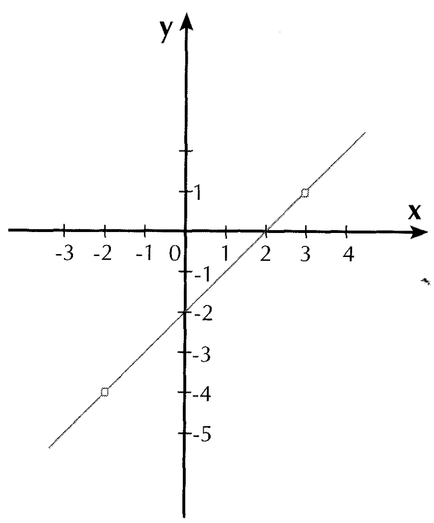


5. Analice la función $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 - x - 6}$.

R.

Dom f = R - {-2,3}

Ran f = R - {-4,1}

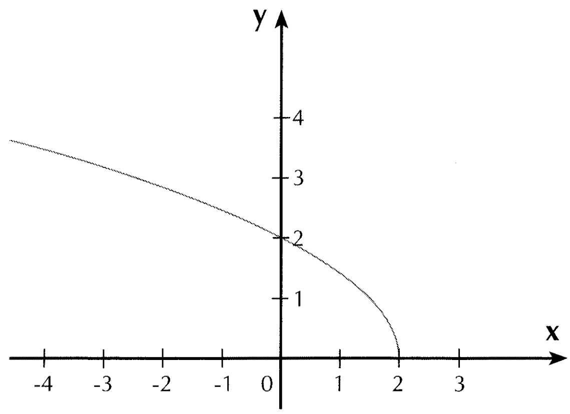


6. Sea la función irracional $f(x) = \sqrt{4-2x}$, grafíquela y analícela.

R.

Dom f = <-∞; 2>

Ran f = [0;∞>



7. Un negocio con un capital original de $20 000 tiene ingresos y gastos semanales de $4000 y $3200, respectivamente. Si todas las utilidades se conservan en el negocio, exprese el valor *V* del negocio final de semanas como una función de *t*. ¿Cuál será el valor del negocio al cabo de cinco semanas?

R. $24 000

8. Una máquina de $30 000 se deprecia en un 2% de su valor original cada año. Determine una función *f* que exprese el valor, *V*, de la máquina después de transcurridos *t* años. ¿Cuál será el valor de la máquina al cabo de 10 años?

R. $24 512

9. Supóngase que la función de oferta semanal por una libra de su café casero en un local de venta de café es $p = q/50$, en donde q es el numero de libras de café que se ofrecen por semana. ¿Cuántas libras de café a la semana deben ofrecerse si el precio es de $8 por libra? ¿Cuántas libras de café a la semana deben ofrecerse si el precio es de $20 por libra?

R. a. 400 libras a la semana.

b. 1000 libras a la semana

10. Cuando se venden q unidades de cierto producto (q no es negativa), la utilidad P está dada por la ecuación $P = 1{,}25q$ ¿Es P una función de q? ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?

R. Sí; P; q

11. Supóngase que la función de demanda anual para que un actor protagonice una película es $p = 1\ 200\ 000/q$, en donde q es el número de películas que él estelariza durante el año. Si el actor actualmente cobra \$600 000 por película, ¿cuántas películas protagonizará cada año? Si quiere protagonizar cuatro películas por año, ¿cuánto cobrará por ello?

R. 2 ; \$30 000

12. La tabla siguiente se conoce como un programa de oferta. Dicha tabla proporciona una correspondencia entre el precio p de un producto y la cantidad q que los consumidores demandarán (esto es, comprarán) a ese precio.

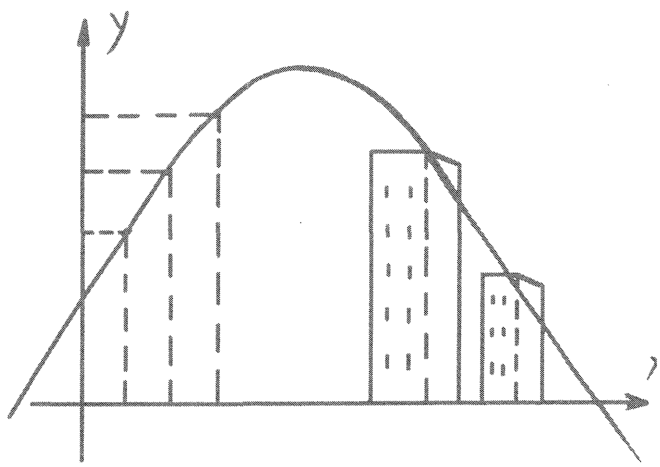
(a) Si $p = f(q)$, determine $f(2900)$ y $f(3000)$.

(b) Si $q = g(p)$, determine $g(10)$ y $g(17)$

Precio en \$ por unidad, p	Cantidad demandada por semana q
10	3000
12	2900
17	2300
20	2000

R. a) 12; 10

b) 3000; 2300



Capítulo 11
OPERACIONES CON FUNCIONES

11.1 Suma de funciones

La suma de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ es otra función denotada por $(f + g)(x)$, cuya regla de correspondencia es $f(x) + g(x)$ y su domino es $Dom\, f \cap Dom\, g$.

Para sumar dos funciones, debe sumar sus reglas de correspondencia e interceptar sus dominios.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$Dom\,(f + g) = Dom\, f \cap Dom\, g$$

Ejemplos:

1. Sean las funciones:

$$f(x) = 2x + 4 \quad ; \quad x \in [-2,1>$$
$$g(x) = \sqrt{x+1} \quad ; \quad x \geq -1$$

Halle $h(x) = f(x) + g(x)$

Solución:

h existe si $Dom\,(f) \cap Dom\,(g) \neq \phi$

$Dom\, f = [-2,1>$

$Dom\, g = [-1,\infty>$

$Dom\, g \cap Dom\, g <-1,1>$

$$h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow h(x) 2x + 4 + \sqrt{x+1}; \quad x \in [-1,1>$$

2. Sean las funciones:

$f(x) = 3 - 2x;\ x \in R$

$g(x) = 5x + 2;\ x \in <0, \alpha>$

Halle $h(x) = f(x) + g(x)$

Solución:

h existe si $Dom f \cap Dom g \neq \phi$

$Dom f = R$

$Dom g = <0,\infty>$

$Dom g \cap Dom (g)$ $<0,\infty>$

$h(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow 3 - 2x + 5x + 2 \Rightarrow h(x)3x + 5 ; x \in <0,\infty>$

lotada

omino

11.2 Diferencia de funciones

La diferencia de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ es otra función denotada por $(f\text{-}g)(x)$, cuya regla de correspondencia es $f(x) - g(x)$ y su domino es $Dom f \cap Dom g$.

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$Dom\ (f - g) = Dom f \cap Dom g$$

Ejemplos:

1. Sean las funciones:

$f(x) = 3x + 5;\ x \in [-5;5]$

$f(x) = 7x - 1;\ x \in [-3;8]$

Halle $h(x) = g(x) - f(x)$

Solución:

h existe si $Dom(f) \cap Dom(g) \neq \phi$

$Dom(f) = [-5;5]$

$Dom(g) = [-3;8]$

$Dom(f) \cap Dom(g) = [-3;5]$

$h(x) = g(x) - f(x) \Rightarrow 7x - 1 + (3x + 5) \Rightarrow h(x)=4x - 6 ;\ x \in [-3;5]$

2. Sean las funciones:

$f(x) = 3x / 2;\quad x \in <-4;10>$

$g(x) = 2x\quad ;\quad x \in [-3;50]$

Para hallar la función diferencia de dos funciones, debe restar sus reglas de correspondencia e interceptar sus dominios.

Halle $h(x) = f(x) - g(x)$

Solución:

h existe si $Dom(f) \cap Dom(g) \neq \phi$

$Dom(f) = <-4;10>$

$Dom(g) = [-3;50]$

$Dom(f) \cap Dom(g) = [-3;10>$

$$h(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow \frac{3x}{2} - 2x \Rightarrow h(x)\frac{-x}{2};\ x \in [-3;10>$$

11.3 Producto de funciones

El producto de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ es otra función denotada por $(f.g)(x)$, cuya regla de correspondencia es $f(x) \,.\, g(x)$ y su domino es $Dom\, f \cap Dom\, g$.

Para hallar la multiplicación de dos funciones, debe multiplicar sus reglas de correspondencia e interceptar sus dominios.

$$(fg)(x) = f(x) \,.\, g(x)$$
$$Dom\,(f \,.\, g) = Dom\, f \cap Dom\, g$$

Ejemplos:

1. Sean las funciones:

$f(x) = x + 3;\ \ x \in [-27;32]$

$g(x) = x - 3;\ \ x \in [-60;50]$

Halle $h(x) = f(x) \,.\, g(x)$

Solución:

h existe si $Dom\, f \cap Dom\, g \neq \phi$

$Dom\, f = [-27;32]$

$Dom\, g = [-60;50]$

$Dom\, f \cap Dom\, g = [-27;32]$

$h(x) = f(x) \,.\, g(x) \Rightarrow (x + 3)(x - 3) \Rightarrow h(x) = x^2 - 9;\ x \in [-27;32]$

2. Sean las funciones:

$f(x) = 2x$

$g(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Halle $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

Solución:

h existe si $Dom\,f \cap Dom\,g \neq \phi$

$Dom\,f = \mathbb{R}$

$Dom\,g = \mathbb{R} - \{0\}$

$Dom\,f \cap Dom\,g = \mathbb{R} - \{0\}$

$$h(x) = f(x).g(x) \Rightarrow 2x.\frac{1}{x^2} \Rightarrow h(x) = \frac{2}{x};\ x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

11.4 División de funciones

La división de dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ es otra función denotada por $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$, cuya regla de correspondencia es $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ y su domino es $Dom\,f \cap Dom\,g$. Además, debemos eliminar del domino los valores de x que anulen la función $g(x)$.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)};\ g(x) \neq 0$$
$$Dom\,(f/g) = Dom\,f \cap Dom\,g$$

Para dividir dos funciones, debe dividir sus reglas de correspondencia e interceptar su dominios. Pero, además, debe eliminar del dominio los valores de *x* que convierten en cero la función divisor.

Ejemplos:

1. Sean las funciones

$f(x) = 4x - 2$

$g(x) = 2$

Halle $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Solución:

h existe si $Dom\,f \cap Dom\,g \neq \phi$

$Dom\,f = \mathbb{R}$

$Dom\, g = R$

$Dom\, f \cap Dom\, g = R$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \frac{4x-2}{2} \Rightarrow h(x) = 2x - 1; \; x \in R$$

2. Sean las funciones:

$f(x) = 5 - x; \quad x \in R$

$g(x) = x + 2; \quad x \in [-2;2]$

Halle $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Solución:

h existe si $Dom\, f \cap Dom\, g \neq \phi$

$Dom\, f = R$

$Dom\, g = [-2;2]$

$Dom\, f \cap Dom\, g = [-2;2]$

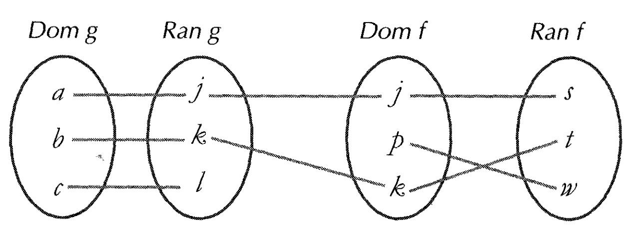
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h(x) = \frac{5-x}{x+2}; \; x \in [-2;2]$$

11.5 Composición de funciones

Para hallar la función f' compuesta con g' (f o g), debe reemplazar g como un valor de *x* en *f*.
Los valores del dominio de g que hagan que f(x) pertenezca al dominio de f, serán el dominio de f o g.

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ para un determinado valor de x, podemos obtener un valor $g(x)$. Si este valor obtenido se reemplaza en la función $f(x)$, tendremos la función compuesta $f(g(x))$, denotada por el símbolo $(fog)(x)$, que se lee «f compuesta con g».

El dominio de la función $(fog)(x)$ está dado por todos los valores de x, tales que hacen del rango de g un conjunto contenido en el dominio de f. Veamos esta relación gráficamente.



Del gráfico podemos deducir lo siguiente respecto de la función $(fog)(x)$:

En primer lugar, debemos tener en cuenta que $(fog)(x)$ no es otra cosa que $f(g(x))$.

$x = a$

Ingresamos el valor a en $g(x)$ y obtenemos el valor j. Dado que j pertenece al dominio de f, podemos ingresarlo en la función $f(x)$ y obtenemos el valor s.

Entonces, se cumple que $(fog)(a) = s$.

Por lo tanto, a pertenece a *Dom* (fog) y s pertenece a *Ran* (fog).
El valor j no aparece en la expresión final, pero nos ha servido para relacionar ambas funciones.

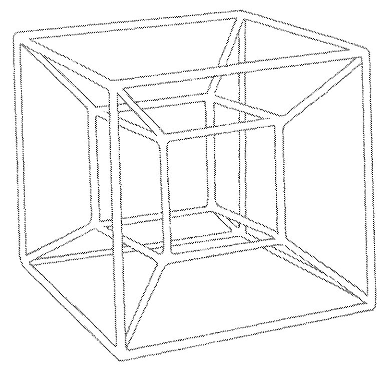
$x = b$

Ingresamos el valor b en $g(x)$ y obtenemos el valor k. Dado que k pertenece al dominio de f, podemos ingresarlo en la función $f(x)$ y obtenemos el valor t.

Entonces, se cumple que $(fog)(b) = t$.

Por lo tanto, b pertenece a *Dom* (fog) y t pertenece a *Ran* (fog).

El valor k no aparece en la expresión final, pero nos ha servido para relacionar ambas funciones.



$x = c$

Ingresamos el valor c en $g(x)$ y obtenemos el valor l. Dado que l no pertenece al dominio de f, entonces no pertenece tampoco a *Dom* (fog).

Por lo tanto, el dominio de $(f \circ g)(x)$ será $Dom(fog) = \{a;b\}$

Ejemplos:

1. Halle la composición fog, si

$$f(x) = x \quad ; \quad x \in [-5;5]$$
$$g(x) = \sqrt{x+1} \quad ; \quad x > 3$$

Solución:

Existe fog si existe dominio para dicha función.

$\rightarrow x \in Dom(fog)$ si

$$x \in Dom\, g(x) \quad \wedge \quad g(x) \in Dom\, f(x)$$
$$x \in [3, \infty[\quad \wedge \quad \sqrt{x+1} \in [-5,5]$$

Hallamos el rango de $g(x)$: $\sqrt{x+1} \in [-5,5]$

$$-5 \leq \sqrt{x+1} \leq 5$$
$$0 \leq x + 1 \leq 25 \ (-1)$$
$$-1 \leq x \leq 24$$

Luego, lo interceptamos con el dominio de $f(x)$

$x \in [3;\infty>$ $\wedge$ $x \in [-1;24]$

$x \in [3;\infty>$ $\wedge$ $x \in [-1;24]$

$x \in [-1;24>$

$\therefore fog = f(g(x)) = f(\sqrt{x+1}) = \sqrt{x+1}$

$\forall x \in [3;24]$

2. Halle la composición fog si

$f(x) = 2x + 5$ $x \in [0;3]$

$g(x) = 2x^2 - 2$ $x \in [-2;2]$

Solución:

Existe fog si existe dominio para dicha función.

$\rightarrow x \in Dom\, fog$ si

$x \in Dom\, g(x)$ $\wedge$ $g(x) \in Dom\, f(x)$

$x \in [-2;2]$ $\wedge$ $2x^2 - 2 \in [0;3]$

Hallamos el rango de $f(x)$ $2x^2 - 2 \in [0;3]$

$$0 \leq 2x^2 - 2 \leq 3 \quad (+2)$$

$$2 \leq 2x^2 \leq 5 \quad (:2)$$

$$1 \leq x^2 \leq \frac{5}{2}$$

Luego, lo interceptamos en el dominio de f:

$x \in [-2;2] \wedge x \in [1;\sqrt{5/2}] \cup [-\sqrt{5/2};-1]$

$x \in [-\sqrt{5/2};-1] \cup [1;\sqrt{5/2}]$

$f(g(x)) = f(2x^2 - 2) = 2(2x^2 - 2) + 5$

$(fog)(x) = 4x^2 + 1$

$\forall x \in [-\sqrt{5/2};-1] \cup [1;\sqrt{5/2}]$

Para hallar la función inversa de *f*, debe intercambiar los valores de *x* e *y*, así como despejar *y*. El rango de la función original será el dominio de la función inversa (f^{-1}).

11.6 Función inversa

Dada una función $f(x)$, se dice que esta posee una función inversa (es decir, que f es 'inversible') solamente si es biyectiva. La función inversa de $f(x)$ se denota por $f^{-1}(x)$. La función inversa debe cumplir que si $f(x) = y$, entonces $f^{-1}(y) = x$.

También podemos definir la función inversa como aquella en la que se cumple que si $(fof^{-1})(a) = b$, entonces $(f^{-1}of)(b) = a$.

El símbolo f^{-1} no indica que la función se esté elevando a la menos 1 (es decir, no indica el inverso multiplicativo), sino que debemos intercambiar las variables en la función.

El dominio de la función f^{-1} está dado por el rango de la función f. De la misma manera, el rango de la función f^{-1} está dado por el dominio de la función f.

Para obtener la regla de correspondencia de f^{-1} debemos, en la regla de correspondencia de f, intercambiar los valores de x e y, y luego, despejar y en función de x.

Las gráficas de f y f^{-1} son simétricas una respecto de la otra.

Ejemplos:

1. Hallar la inversa de la función $f(x) = \dfrac{x}{2} - 5$

Solución:

Sea la función $f(x) = \dfrac{x}{2} - 5$

Dom f = R; además, sabemos que *Dom f* = *Rang* f^{-1}

$\therefore$ *Rang* f^{-1} = R.

Además, *Rang f* = R = *Dom* f^{-1} $\therefore$ *Dom* f^{-1} = R

$y = \dfrac{x}{2} - 5$

$x = \dfrac{y}{2} - 5$ intercambiando y por x

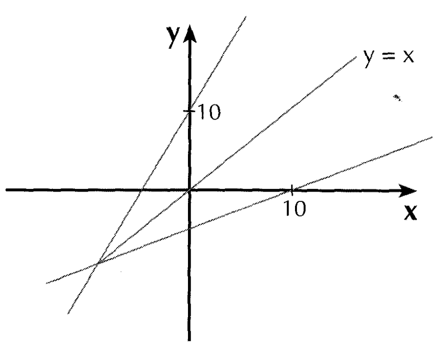
Ahora, despejamos y en términos de x:

$x + 5 = \dfrac{y}{2} \qquad .2$

$y = 2x + 10$ intercambiamos y por $f^{-1}(x)$

$f^{-1}(x) = 2x + 10$

$\therefore$ La inversa es la función $f^{-1}(x) = 2x + 10$



Las gráficas de $F_{(x)}$ y $F^{-1}{}_{(x)}$ son simétricas respecto de la recta $y = x$

2. Halle la inversa de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $<0;\infty>$.

Solución:

$f(x) = x^2$

$Dom\, f = <0;\infty>$ y por propiedad $Dom\, f = Rang\, f^{-1}$

$\therefore\ Rang\, f^{-1} = <0;\infty>$

$Rang\, f = ??\ \Rightarrow$ sabemos que:

$\forall x \in R : x^2 \geq 0$

$x^2 \geq 0$

$f(x) \geq 0\ \Rightarrow Rang\, f = <0;\infty> = Dom\, f^{-1}$

Ahora $y = x^2$

Debemos intercambiar y por x y despejar y:

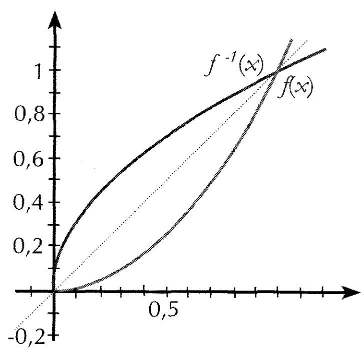
$x = y^2$

$\sqrt{x} = \sqrt{y^2}$

$y = \sqrt{x}$

Ahora sustituimos y por $f^{-1}(x)$:

$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$



Ejercicios resueltos

1. Sean las funciones:

$$f(x) = \frac{x-2}{x+4}$$

$$g(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

Halle $h(x) = f(x) + g(x)$

Recuerde lo visto en el capítulo 1 sobre la suma de fracciones.

Solución:

h existe si $Dom\,f \cap Dom\,g \neq \phi$

$Dom(f) = R - \{-4\}$

$Dom(g) = R - \{-2\}$

$Dom(f) \cap Dom(g) = \{-4;-2\}$

$$\Rightarrow h(x) = f(x) + g(x) = \frac{x-2}{x+4} + \frac{x-1}{x+2} = \frac{x^2-4+x^2+3x-4}{x^2+6x+8}$$

$$= \frac{2x^2+3x-8}{x^2+6x+8}; \quad x \in R -$$

2. Sean las funciones:

$$f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-2}; \quad x \in [0;4]$$

$$g(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}; \quad x \in [-5;5]$$

Halle $h(x) = f(x) + g(x)$

Solución:

h existe si $Dom\,f \cap Dom\,g \neq \phi$

$Dom(f) = x \in R - \{2\} \cap x \in [0,4] = [0;2> \cup <2;4]$

$Dom(g) = x \in R - \{2\} \cap x \in [-5,5] = [-5;2> \cup <2;5]$

$Dom(f) \cap Dom(g) = [0;2> \cup <2;4]$

$$\Rightarrow h(x) = f(x) + g(x) = \frac{(x+1)^2}{x-2} + \frac{(x-1)^2}{x-2}$$

$$= \frac{x^2+2x+1+x^2-2x+1}{x-2} = \frac{2x^2+2}{x-2}; x \in [0;2> \cup <2;4]$$

3. Sean las funciones:

$$f(x) = \frac{2x+6}{x-1}$$

$$g(x) = \frac{3x+2}{x-2}$$

Halle $h(x) = f(x) - g(x)$

Solución:

h existe si $Dom\, f \cap Dom\, g \neq \phi$

$Dom(f) = \mathrm{R} - \{1\}$

$Dom(g) = \mathrm{R} - \{2\}$

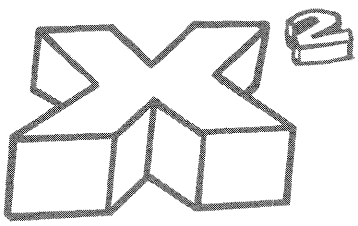
$Dom(f) \cap Dom(g) = \mathrm{R} - \{1;2\}$

$$\Rightarrow h(x) = f(x) + g(x) = \frac{2x+6}{x-1} - \frac{3x+2}{x-2}$$

$$= \frac{2x^2+6x-4x-12-(3x^2+2x-3x-2)}{x^2+3x+2} = \frac{-x^2+3x-10}{x^2+3x+2};$$

$x \in \mathrm{R} - \{1;2\}$

6



4. Sean las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x+3}; \quad x \in <-5;10>$$

$$g(x) = \sqrt{2x}; \quad x \in [-10;10]$$

Halle $h(x) = f(x) - g(x)$

Solución:

h existe si $Dom\, f \cap Dom g \neq \phi$

$Dom(f) = x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

$\therefore\ x \in [-3; \infty> \cap <-5,10> = [-3; 10>$

$Dom(g) = 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$\therefore\ x\ [0; \infty> \cap [-10;10] = [0;10]$

$Dom(f) \cap Dom(g) = [0;10>$

$$h(x) = f(x) - g(x) \Rightarrow \sqrt{x+3} - \sqrt{2x}; \quad x \in [0;10>$$

5. Sean las funciones:

$$f(x) = \sqrt{3x+7}$$

$$g(x) = \sqrt{2x-2}$$

Halle $h(x) = f(x) \,.\, g(x)$

Solución:

h existe si $Dom\, f \cap Dom\, g \neq \phi$

$Dom(f) = 3x + 7 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-7}{3}$

$\therefore\ x \in [\frac{-7}{3};\infty >$

$Dom(g) = 2x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$\therefore\ x \in [1; \infty>$

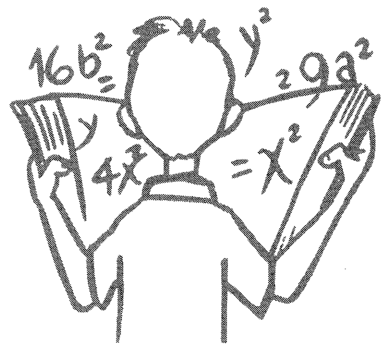
$Dom(f)\ \cap\ Dom(g) = [0; \infty>$

$h(x) = f(x).g(x) \Rightarrow \sqrt{3x+7}.\sqrt{2x-2} \Rightarrow \sqrt{6x^2+8x-14};$

$x \in [1; \infty>$

6. Sean las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2; x \geq 3 \\ x+3; x \geq -3 \end{cases}$$



$g(x) = x - 4;\ x \in <-6;5>$

Halle $h(x) = f(x) . g(x)$

Solución:

$$(f.g)(x)\begin{cases} f_1(x).g(x);\ x \in Dom\ f_1 \cap Dom\ g \\ f_2(x).g(x);\ x \in Dom\ f_2 \cap Dom\ g \end{cases}$$

$Dom(f_1) = R \cap x \in [3; \infty> \Rightarrow x\ \geq 3$

$\therefore x \in [3; \infty>$

$Dom(f_2) = R \cap x \in [-3; \infty> \Rightarrow x\ \geq -3$

$\therefore\ x \in [-3, \infty>$

$Dom(g) = R \cap x \in <-6;5> \Rightarrow x\ \in <-6;5>$

$\therefore\ x \in\ ]-6;5[$

$Dom(f_1) = R \cap Dom(g) = [3;5>$

$Dom(f_2) = R \cap Dom(g) = [-3;5>$

$$(f.g)(x)\begin{cases} (f_1.g)(x) = (x^2)(x-4) = x^3 - 4x^2;\ x \in [3;5 > \\ (f_2.g)(x) = (x+3)(x-4) = x^2 - x - 12;\ x \in [-3;5 > \end{cases}$$

7. Sean las funciones:

$$f(x)=\sqrt{x-\frac{1}{2}};\quad x\in[-10;10]$$

$$g(x)=\frac{3x-4}{x-\frac{1}{2}};\quad x\in[-6;6]$$

Halle $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

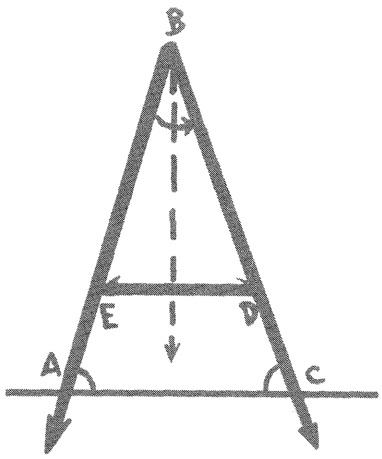
Solución:

h existe si $Dom f \cap Dom g \neq \phi$

$Dom\ (f) = x - 1/2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1/2$

$$\Rightarrow x\in[\frac{1}{2};\infty> \cap x\in[-10;10]=x\in[\frac{1}{2};10]$$

$$\therefore Dom(f)=x\in[\frac{1}{2};10]$$



$$Dom(g) = \mathrm{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \cap x\in[-6;6]=\left[-6;\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};6\right]$$

$$\therefore Dom(g)=\left[-6;\frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle\frac{1}{2};6\right]$$

$$Dom(f)\cap Dom(g)=<\frac{1}{2};6]$$

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\Rightarrow\frac{\sqrt{x-\frac{1}{2}}}{\frac{3x-4}{x-\frac{1}{2}}}=\frac{2x-1}{12x-16}\sqrt{4x-2};\quad x\in<\frac{1}{2};6]$$

8. Sean las funciones:

$$f(x)=\begin{cases}2x+1; & x\geq 5\\ x-7; & x\geq 2\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}7x-5; & x\in<2;3>\\ 2x; & x\in[0;10]\end{cases}$$

Halle $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Solución:

$$(f.g)(x)\begin{cases} f_1(x).g_1(x); x \in Dom\ f_1 \cap Dom\ g \\ f_1(x).g_2(x); x \in Dom\ f_2 \cap Dom\ g \\ f_2(x).g_1(x); x \in Dom\ f_1 \cap Dom\ g \\ f_2(x).g_2(x); x \in Dom\ f_2 \cap Dom\ g \end{cases}$$

$Dom(f_1) = R \cap x \in [5; \infty> \Rightarrow x \geq 5$

$\therefore\ x \in [5, \infty>$

$Dom(f_2) = R \cap x \in [2; \infty> \Rightarrow x \geq 2$

$\therefore\ x \in [2, \infty>$

$Dom(g_1) = R \cap x \in [2;3> \Rightarrow x \in <2,3>$

$\therefore\ x \in]2,3>$

$Dom(g_2) = R \cap x \in [0;10] \Rightarrow x \in [0,10]$

$\therefore\ x \in [0;10>$

$Dom(f_1) \cap Dom(g_1) = \phi$

$Dom(f_1) \cap Dom(g_2) = [5;10]$

$Dom(f_2) \cap Dom(g_1) = <2;3>$

$Dom(f_2) \cap Dom(g_2) = [2;10]$

$$(f.g)(x)\therefore\begin{cases} (f_1.g_1)(x) = \phi \\ (f_1.g_2)(x) = (2x+1)(2x) = 4x^2 + 2x; x \in [5,10] \\ (f_2.g_1)(x) = (x-7)(7x-5) = 7x^2 - 54x + 35; x \in <2;3> \\ (f_2.g_2)(x) = (x-7)(2x) = 2x^2 - 14x; x \in [2,10] \end{cases}$$

9. Halle *gof.*

$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}; x \in\ <1;5>$

$g(x) = x + 3; x \in [-2; 2]$

Solución:

Dom gof $= x/ \in$ *Dom f* ^ $f(x) \in$ *Dom* $g(x)$

$x / x \in <1;5> \wedge \sqrt{x^{-1}} \in [-2;2]$

$\Rightarrow -2 \leq \sqrt{x^2 - 1} \leq 2$

$0 \leq \sqrt{x^2 - 1} \leq 2$...........

$0 \leq x^2 - 1 \leq 4$..............

$1 \leq x^2 \leq 5$

$$x \in <1;5> \wedge\ x \in [1;5] \cup [-\sqrt{5};-1]$$

$$x \in <1,5>$$

$$\therefore\ gof(x) = g(f(x))$$

$$= g(\sqrt{x^2-1})$$

$$\Rightarrow g\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2-1}+3$$

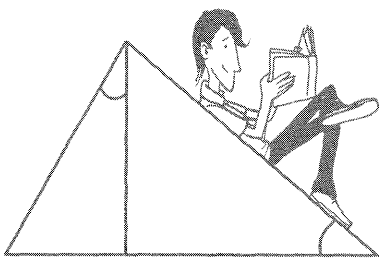
$$g(f(x)) = \sqrt{x^2-1}+3$$

$$Dom\ g(f(x)) = <0;5>$$

11. Halle *gof* si

$$f(x) = \frac{1}{x-2}; x \geq 3$$

$$g(x) = \frac{2x+1}{x}; x \geq \frac{1}{2}$$



Solución:

$x \in Dom\ gof$ si

$x \in Dom f\ \wedge f(x) \in Dom\ g(x)$

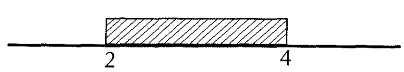
$$x \in [3;\infty+> \wedge \frac{1}{x-2} \in [\frac{1}{2};\infty>$$

$$\frac{1}{x-2} \in [\frac{1}{2};\infty>$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{x-2} \Rightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\frac{4-x}{x-2} \geq 0$$

$$\frac{x-4}{x-2} \leq 0$$



$x \in [3;\infty[\ \wedge\ x \in [2;4]$

$x \in [2;4]$

$$\therefore\ gof(x) = \frac{2f(x)+1}{f(x)} = x \qquad \forall x \in [3;4]$$

12. Encuentre la inversa de la función; $f(x) = x^2 - 3$.

Solución:

Para hallar la inversa de una función, esta debe ser sobreyectiva e inyectiva.

La primera condición es fácil de satisfacer si definimos el conjunto de llegada como el rango de la función.

Para satisfacer la segunda condición, restringiremos el dominio:

$$x \in [0; \infty>$$

Y como el $Dom\,f = Rang\,f^{-1}$ $\therefore$ $Rang\,f^{-1} = [0;\infty>$

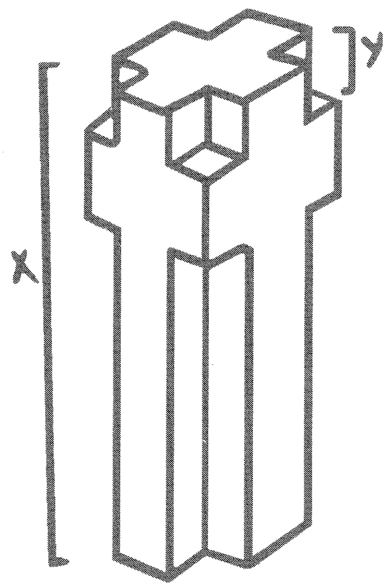
Calculando el rango de f: $x \in [0; \infty> \;\Rightarrow\; x \geq 0$

$$\forall x \in \mathrm{R} : x^2 \geq 0 \qquad (-3)$$

$$x^2 - 3 \geq -3$$

$$f(x) \geq -3$$

$$Rang(f)\text{: } [-3;\infty> \,=\, Dom\,(f^{-1})$$



Ahora $f(x) = x^2 - 3$

Debemos intercambiar y por x; luego, despejar y.

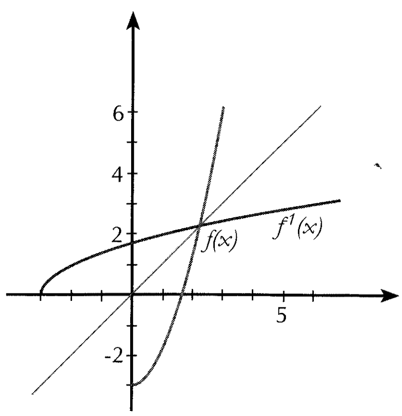
$y = x^2 - 3$

$x = y^2 - 3 \qquad\qquad (+3)$

$x + 3 = y^2$

$\sqrt{x+3} = y$

$y = \sqrt{x+3}$ y sustituyendo y por f^{-1}, tendremos $f^{-1} = \sqrt{x+3}$



13. Encuentre la función inversa de $f(x)=\sqrt{x+1}$

Solución:

Para hallar la inversa de una función, esta debe ser sobreyectiva e inyectiva.

La condición de sobreyectividad es fácil de satisfacer si definimos el conjunto de llegada como el rango de la función.

Para satisfacer la segunda condicion, restringiremos el dominio:

$x \in [-1; \infty\rangle$, es inyectiva.

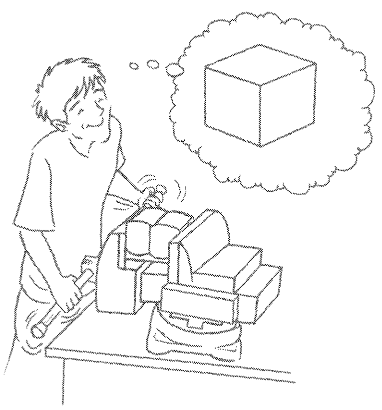
Y como el $Dom\, f = Rang\, f^{-1}$ $\therefore$ $Rang\, f^{-1} = [-1;\infty\rangle$

Calculando el rango de f: $x \in [-1; \infty[\;\Rightarrow\; x + 1 \geq 0$

$$\sqrt{x+1} \geq 0$$

$$f(x) \geq 0$$

$$Rang(f)\text{: } [0;\infty\rangle = Dom\, f^{-1}$$



Ahora $f(x)=\sqrt{x+1}$

Debemos intercambiar y por x; luego, despejar y.

$y=\sqrt{x+1}$

$x=\sqrt{y+1}$

$x^2 = y + 1$

$x^2 - 1 = y$

$y = x^2 - 1$ y sustituyendo y por f^{-1}: $f^{-1} = x^2 - 1$

Por tanto, la función inversa de $f(x)=\sqrt{x+1}$ es:

$$f^{-1}=x^2-1;\quad x \in [0;\infty\rangle$$

14. Halle la función inversa de $f(x)=\dfrac{x+6}{x+3}$ si el dominio de la función es $[4;10]$, considerando, además, que cumple con ser sobreyectiva e inyectiva.

Solución:

La función es inyectiva y sobreyectiva; por tanto, tiene inversa.

Y como el $Dom\,f = Rang\,f^{-1}$ $\therefore$ $Rang\,f^{-1} = [4;10]$

Calculando el rango de la función f:

Tenemos que $\dfrac{x+6}{x+3} = 1 + \dfrac{3}{x+3}$

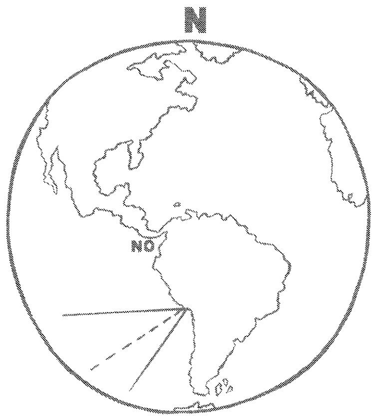
Entonces, $f(x) = 1 + \dfrac{3}{x+3}$

Dado que $x \in [4;10]$

$$7 \le x + 3 \le 13 \qquad \frac{1}{13} \le \frac{1}{x+3} \le \frac{1}{7}$$

$$\frac{3}{13} \le \frac{3}{x+3} \le \frac{3}{7} \qquad \frac{3}{13} + 1 \le \frac{3}{x+3} + 1 \le \frac{3}{7} + 1$$

$$\frac{16}{13} \le f(x) \le \frac{10}{7} \qquad \therefore\ Rang\,f : \left[\frac{16}{13};\frac{10}{7}\right] = Dom\,f^{-1}$$



Ahora $f(x) = 1 + \dfrac{3}{x+3}$

Debemos intercambiar y por x; luego, despejar y.

$$y = 1 + \frac{3}{x+3} \quad \Rightarrow \quad x = 1 + \frac{3}{y+3} \qquad (-1)$$

$$x - 1 = \frac{3}{y+3} \qquad (:3)$$

$$\frac{x-1}{3} = \frac{1}{y+3}$$

$$\frac{3}{x-1} = \frac{y+3}{1} \qquad (-3)$$

$$\frac{3}{x-1} - 3 = y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{x-1} - 3$$

y sustituyendo y por f^{-1}: $f^{-1} = \dfrac{3}{x-1} - 3;\ x \in \left[\dfrac{16}{13};\dfrac{10}{7}\right]$

Ejercicios propuestos

1. Sean las funciones:

$f(x) = 3x^2 - 2x + 6; \quad x \in [-2;1>$

$g(x) = 7x^2 + 4x - 2; \quad x \in <0;16>$

Halle $h(x) = f(x) + g(x)$

R.

$h(x) = 10x^2 + 2x + 4; \quad x \in <0;1>$

2. Sean las funciones:

$f(x) = 4x^2 - 7x - 1; \quad x \in [-8;16>$

$g(x) = 8x^2 + 2x + 4; \quad x \in <-4;5>$

Halle $h(x) = f(x) - g(x)$

R.

$h(x) = -4x^2 - 9x - 5; \quad x \in <-4;5>$

3. Sean las funciones:

$f(x) = \sqrt{x-5}; \quad x \in <-3;2>$

$g(x) = \dfrac{\sqrt{x+5}}{x-2}; \quad x \in <-10;15>$

Halle $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

R.

No existe $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ para estos valores del dominio.

4. Sean las funciones:

$f(x) = \dfrac{3-x}{x+1}$

$g(x) = \dfrac{1}{x-1}$

Halle $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

R.

$$h(x) = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x+1}; \qquad x \in R - \{-1;1\}$$

5. $f(x) = x - 1; \quad 1 \leq x \leq 4$

$$g(x) = \sqrt{x+2}; \qquad x \geq 2$$

Halle gof

$$gof(x) = \sqrt{x+1}; \quad x \in [3;4]$$

6. Encuentre la inversa de la función $f(x) = 3x - 5$

R.

$$f^{-1} = \frac{x+5}{3}$$

7. En la fabricación de un componente para una máquina, el costo inicial de un troquel es de \$850 y todos los otros costos adicionales son de \$3 por unidad producida.

Exprese el costo total C (en dólares) como una función lineal del número q de unidades producidas. ¿Cuántas unidades se producen si el costo total es de \$1600?

R. 250 unidades; C(q) = 3q + 850

8. Un expendio de café vende una libra de café por \$9,75. Los gastos mensuales son \$4500 más \$4,25 por cada libra de café vendida.

a. Escriba una función $r(x)$ para el ingreso mensual total como una función del número de libras de café vendidas.

b. Escriba una función $e(x)$ para los gastos mensuales totales como una función del número de libras de café vendidas.

c. Escriba una función $(r\text{-}e)(x)$ para la utilidad mensual total como una función del número de libras de café vendidas.

R. a. $r(x) = 9{,}75x$

b. $e(x) = 4500 + 4{,}25x$

c. $(r - e)(x) = 5{,}5x - 4500$

9. Un fabricante determina que el número total de unidades de producción por día, q, es una función del número de empleados, m, donde

$$q = f(m) = (40 - m^2) / 4.$$

El ingreso total, r, que se recibe por la venta de q unidades, está dado por la función g, donde

$$r = g(q) = 40q$$

Determine $(gof)(m)$. ¿Qué es lo que describe esta función compuesta?

R. $400m - 10m^2$. La función describe la relación entre el número de empleados y el ingreso total.

10. Una compañía de seguros examinó el registro de un grupo de individuos hospitalizados por una enfermedad particular. Se encontró que la proporción total de quienes habían sido dados de alta al final de t días de hospitalización está dada por:

$$f(t) = 1 - \left(\frac{300}{300+t}\right)^3$$

Evalúe:

(a) $f(0)$

(b) $f(100)$

(c) $f(300)$

(d) ¿Al final de cuántos días se habrá dado de alta al 99,9% del grupo?

R. a) 0

b) 0,578

c) 0,875

d) 2710

11. Si un capital de P dólares se invierte a una tasa de interés simple anual r durante t años, exprese la cantidad total acumulada del capital y del interés como una función de t. ¿Es su resultado una función lineal de t? ¿Cuál será el monto para $600 impuesto a una tasa de 2% durante 6 meses?

R. $M = P(1+rt)$. Sí es una función lineal de t.

$M = \$606$

12. Supóngase que las primas mensuales del seguro de salud para un individuo son de \$125.

a. Escriba las primas mensuales del seguro de salud como función del número de visitas que el individuo hace al doctor.

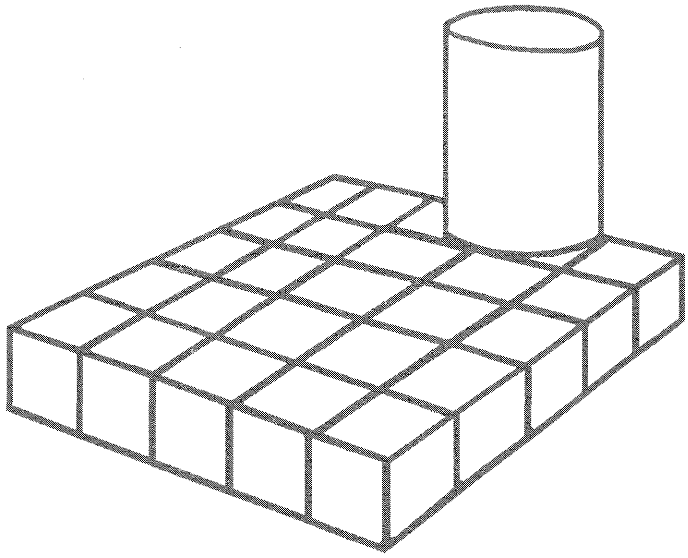
b. ¿Cómo cambian las primas del seguro de salud conforme aumenta el número de visitas al doctor?

c. ¿Qué clase de función es esta?

R. a) $P(n)=125$

b) las primas no cambian

c) función constante



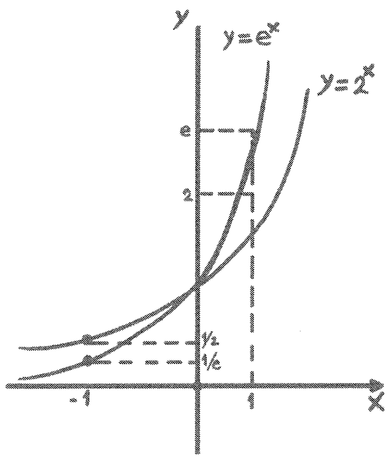
Capítulo 12
FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

12.1 Función exponencial

12.1.1 Definición

Una función exponencial es aquella dada por la relación:

$$f(x) = ab^x.$$



En sentido estricto, se llama función exponencial al caso particular en el que "b" toma el valor de la constante "e" (recuerde que vimos que este valor es aproximadamente 2,71).

Nosotros, sin embargo, en este libro, vamos a estudiar los casos generalizados, en los que "b" puede tomar cualquier valor positivo. Restringimos los valores de b sólo a los positivos, porque de esta manera el dominio de la función será *R*.

12.1.2 Propiedades

La gráfica de la función exponencial pasará siempre por los puntos (0;a) y (1;b), pues:

Si $x = 0$, tendremos $f(0) = ab^0$

$f(0) = a$; es decir que pasa por el punto (0;a)

Si $x = 1$, tendremos $f(1)\ ab^1$

$f(1) = ab$, es decir que pasa por el punto (1; ab)

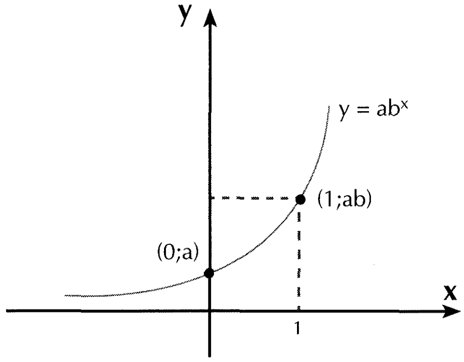
Las propiedades de la función y de su gráfica dependen del valor que adoptan sus constantes. Analizaremos los casos en los que *a* es positivo, pues de esta manera podremos más adelante obtener la función logarítmica.

1. $0 < a \quad ; \quad 1 < b$
2. $0 < a \quad ; \quad 0 < b < 1$

En todos los casos, el dominio de la función exponencial está dado por todos los reales. El rango en este caso estará dado por todos los reales positivos.

Primer caso: $0 < a \quad ; \quad 1 < b$

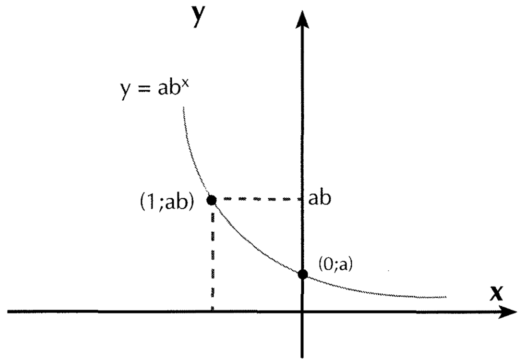
La gráfica de la función tendrá como asíntota al semieje x negativo.



Como se puede apreciar, la gráfica de esta función es continua y creciente.

Segundo caso: $0 < a \quad ; \quad 0 < b < 1$

Como $0 < b < 1$, b es una fracción positiva. En este caso, la gráfica será decreciente. Además, la función tendrá como asíntota al semieje x negativo.



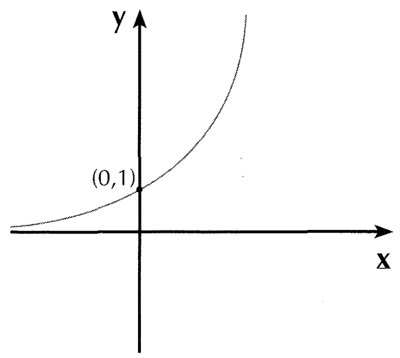
Ejemplos:

1. Analice la función: $f(x) = 2^x$ e indique sus propiedades.

   Solución:

   $f(x) = 2^x$; entonces $a = 1$, $b = 2$

Como $a = 1$, la intersección con el eje será (0;1)



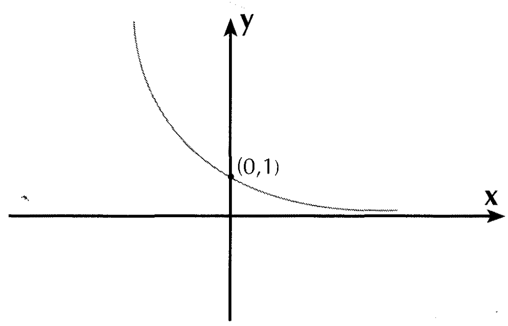
- $Dom\, f = R$.
- $Ran\, f = <0;\infty>$.
- $F(x)$: creciente en su recorrido (la curva crece de izquierda a derecha).
- Asintótica al eje x.
- Cóncava hacia arriba.
- El punto de intersección de la gráfica con el eje Y es el punto (0;1).

2. Analice la función $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e indique sus propiedades.

Solución:

Si $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; entonces a = 1, b = $\frac{1}{2}$

Como 0 < b < 1, tenemos:



- $Dom(f) = R.$.
- $Ran(f) = <0;\infty>$.

- F(x): decreciente en su recorrido (la curva decrece de izquierda a derecha).
- Asintótica al eje x.
- Cóncava hacia arriba.
- El punto de intersección de la gráfica con el eje Y es el punto (0;1).

3. La degradación o el decaimiento del radio obedece a las leyes de crecimiento $A = Ce^{kt}$. Si se tienen 60 mg de radio y su vida media es de 1 690 años, ¿qué cantidad estará presente dentro de cien años a partir de hoy?

Solución:

En este caso, dentro de 1 690 años quedarán sólo 30 mg de radio.

El tiempo de vida media es el tiempo en el que demora cierta masa en disminuir a la mitad por efectos de degradación.

Tenemos la ley de crecimiento $A = Ce^{kt}$.

Mostraremos la siguiente tabla:

Tiempo	0	1690	100
A	60	30	A_{100}

Ya que $A = 60$ cuando $t = 0$, obtenemos $60 = C$. Así, $A = 60e^{kt}$

Ya que $A = 30$ cuando $t = 1690$, obtenemos $A = 60e^{1690k}$ o $0{,}5 = e^{1\,690k}$

Así, $ln\ 0{,}5 = 1690k \Rightarrow k = -0{,}000411$.

Sustituyendo el valor de k en la ley de crecimiento:

$A = 60e^{-0{,}000411t}$.

Ahora, cuando $t = 100$, entonces $A = A_{100}$, tenemos:

$A_{100} = 60e^{-0{,}0411} = 58$. Por tanto, habrá 58 mg de radio presentes dentro de 100 años.

Algunas sustancias se desintegran con el paso del tiempo. 'Vida media' es el tiempo que necesita una cantidad de material para reducirse hasta la mitad.

Recuerde la regla básica de los logaritmos naturales:

$$a = e^x$$
$$\ln(a) = \ln(e^x)$$
$$\ln(a) = x$$

12.2 Función logarítmica

12.2.1 Definición

La función logarítmica es la inversa de la función exponencial. Sabemos, de acuerdo con la definición de función inversa, que esta se obtiene intercambiando los valores de x y de y. En este caso, consideraremos solamente funciones exponenciales en las que a = 1.

Si partimos de la expresión $y = b^x$, e intercambiamos los valores de x y de y, tendremos:

$$x = b^y$$

Ahora, despejaremos el valor de y:

$$x = b^y$$

$$log_b x = log_b\, (b^y)$$

$$log_b x = y$$

12.2.2 Propiedades

La gráfica de la función logaritmo pasará siempre por los puntos (1;0) y (b;1), pues:

Si $x = 1$, tendremos f (1) = $log_b 1$

f (1) = 0; es decir que pasa por el punto (1;0)

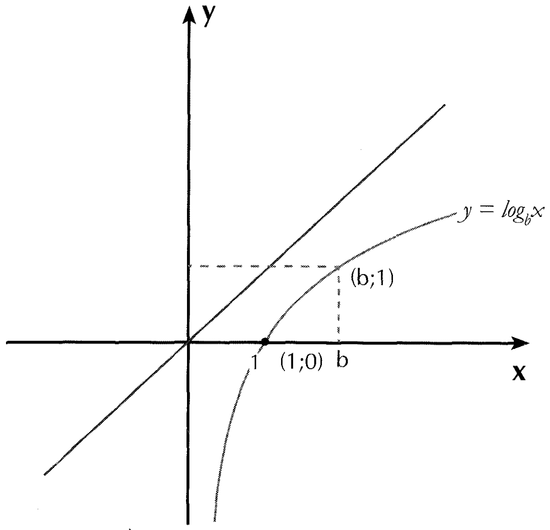
Si $x = b$, tendremos f (b) = $log_b b$

f (b) = 1, es decir que pasa por el punto (b; 1)

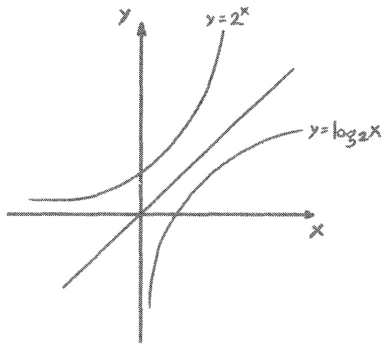
Las propiedades de la función y de su gráfica dependen del valor que adopta la constante b. En todos los casos, el dominio de la función exponencial está dado por todos los reales positivos; el rango estará dado por todos los reales.

Primer caso: $1 < b$

La gráfica de la función tendrá como asíntota al semieje y negativo:

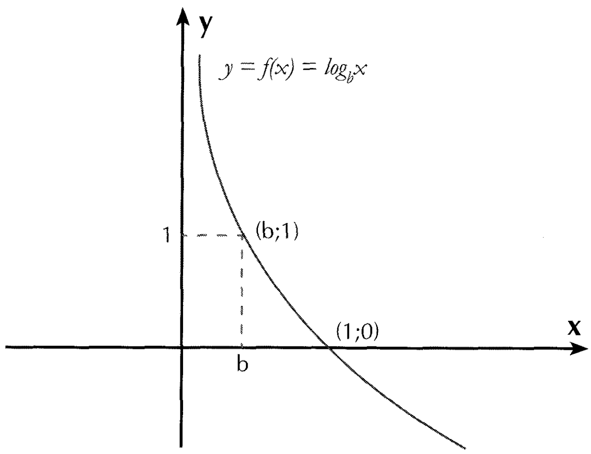


Como se puede apreciar, la gráfica de esta función es continua y creciente.



Segundo caso: $0 < b < 1$

Como $0 < b < 1$, b es una fracción positiva. En este caso, la gráfica será decreciente. Además, la función tendrá como asíntota al semieje y positivo.



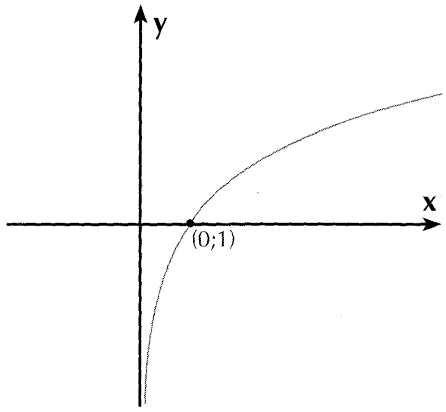
Ejemplos:

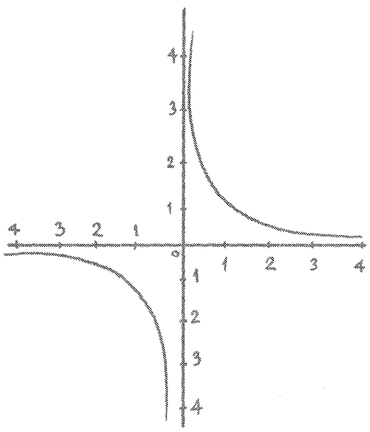
1. Analice la función $f(x) = log_2\, x$ e indique sus propiedades.

   Solución:

   Si $f(x) = log_2\, x$; entonces $a = 1$, $b = 2$.

Como $b > 1$, tenemos:





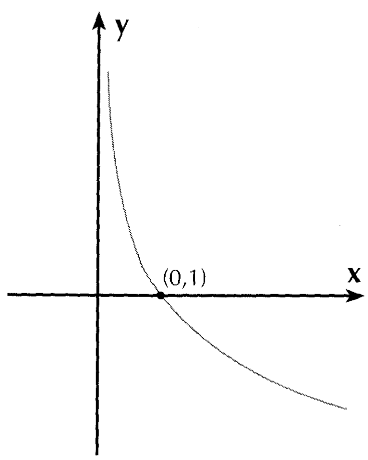
- *Dom f* = <0;∞>.
- *Ran f* = R.
- $F(x)$: creciente en su recorrido (la curva crece de izquierda a derecha).
- Asintótica al eje y.
- Cóncava hacia abajo.
- El punto de intersección de la gráfica con el eje x es el punto (1;0).

2. Analice la función $f(x) = log_{1/2}x$ e indique sus propiedades.

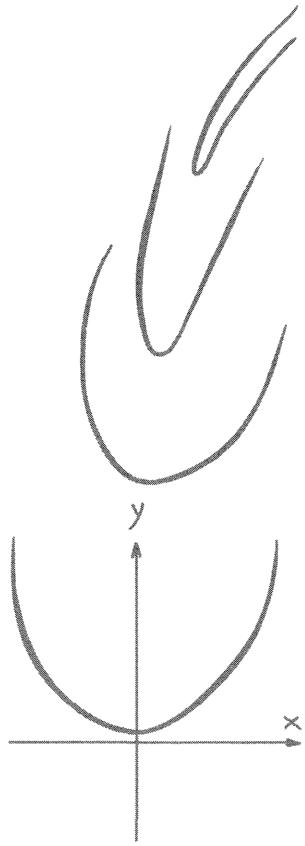
Solución:

Si $f(x) = log_{1/2}x$; entonces $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$

Como $0 < b < 1$, tenemos:

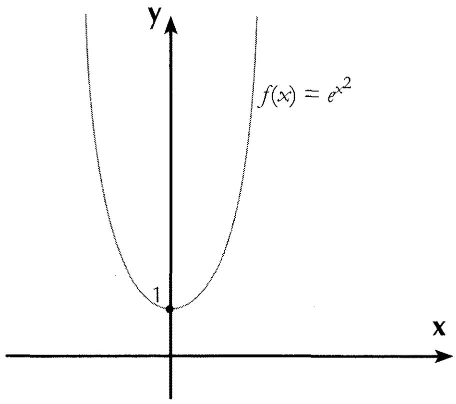


- $Dom(f) = <0;\infty>$.
- $Ran(f) = R$.
- $F(x)$: decreciente en su recorrido (la curva decrece de izquierda a derecha).
- Asintótica al eje y.
- Cóncava hacia arriba.
- El punto de intersección de la gráfica con el eje x es el punto $(1;0)$.



Ejercicios resueltos

1. Analice la función $f(x) = e^{x^2}$



Solución:

- $Dom\,f$: $<-\infty;\infty>$.
- Para el rango:

  Tenemos que $\forall x \in R; x^2 \geq 0$

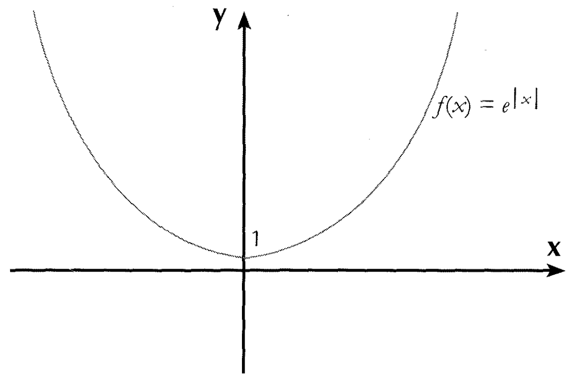
  $$x^2 \geq 0$$

  $$e^{x^2} \geq e^0 \quad \Rightarrow \text{ y dado que } f(x) = e^{x^2}$$

  $\Rightarrow \quad Ran\,f$: $[1;\infty>$
- La función es creciente a medida que se aleja del eje y.
- Es cóncava hacia arriba.

- No presenta asíntotas.
- Corta al eje y en el punto (0;1)

2. Analice la función $f(x) = e^{|x|}$



Solución:

- *Dom f:* $<-\infty;\infty>$
- Para el rango:

  Tenemos que $\forall x \in R; |x| \geq 0$

  $$|x| \geq 0$$

  $$e^{|x|} \geq e^{0} \Rightarrow e^{|x|} \geq 1 \text{ y dado que } f(x) = e^{|x|}$$

  $\therefore$ *Ran f.* $[1;\infty>$

- La función es creciente a medida que se aleja del eje *y*.
- Es cóncava hacia arriba.
- No presenta asíntotas.
- Corta al eje *y* en el punto (0;1)

4. Es posible medir la concentración de alcohol en la sangre de una persona. Investigaciones médicas recientes sugieren que el riesgo R (dado como porcentaje) de tener un accidente automovilístico puede ser modelado mediante la ecuación:

   $R = 6e^{kx}$ .... (1)

   Donde x es la concentración de alcohol en la sangre y k es una constante.

a) Al suponer que una concentración de 0,04 de alcohol en la sangre produce un riesgo del 10% (R = 10) de sufrir un accidente, ¿cuál es el valor de la constante?

b) Utilice el valor de k e indique cuál es el riesgo para una concentración de alcohol de 0,17.

c) Con el mismo valor de k, indique la concentración de alcohol correspondiente a un riesgo del 100%.

d) Si la ley establece que las personas con un riesgo de sufrir un accidente del 20% o mayor no deben conducir vehículos, ¿qué concentración de alcohol en la sangre debe tener un conductor para ser arrestado y multado?

Recuerde:

$$log_b a = c \Leftrightarrow a = b^c$$

Solución:

a) Una concentración de 0,04 y un riego del 10% indican que x = 0,04. Al sustituir estos valores en la ecuación (1), se obtiene:

$$10 = 6e^{0,04k}$$

$$\frac{10}{6} = e^{0,04k}$$

$$log_e \frac{10}{6} = 0,04k \quad \text{(definición del logaritmo)}$$

$$k = \frac{1}{0,04} ln \frac{10}{6} = 12,77$$

Con el valor de k encontrado, la ecuación (1) se puede escribir de la forma:

$$R = 6e^{12,77x} \text{.............................} \quad (2)$$

b) Al sustituir x = 0,17 en la ecuación (2), se obtiene $R = 6e^{(12,77).(0,17)} = 52,6$.

Este resultado indica que para una concentración de alcohol de 0,17, el riesgo de sufrir un accidente es del 52,6%.

c) Al sustituir R = 100 en la ecuación (2) y solucionando la ecuación para x, se obtiene:

$$100 = 6e^{12,77x}$$

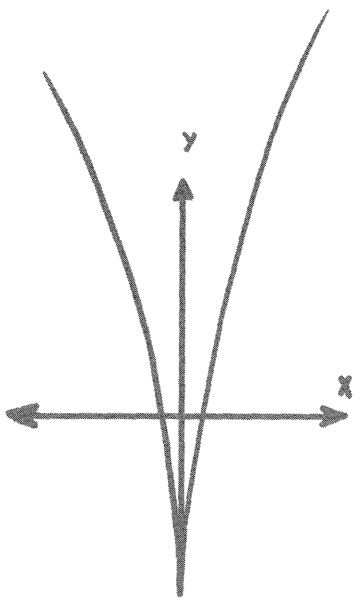
$$\frac{100}{6} = e^{12,77x}$$

$$log_e \frac{100}{6} = 12,77x$$

$$x = \frac{1}{12,77} ln \frac{100}{6} = 0,22$$

Lo que indica que con una concentración de 0,22, el riesgo de sufrir un accidente es del 100%.

d) Con R = 20 en la ecuación (2), se determina la concentración x de alcohol en la sangre:



$$20 = 6e^{12,77x}$$

$$\frac{20}{6} = e^{2,77x}$$

$$x\frac{1}{12,77} \cdot in \frac{20}{6} = 0,094$$

Esto indica que un conductor que presente una concentración de alcohol mayor o igual a 0,094 debe ser arrestado y multado.

4. Una colonia de bacterias crece con la ley de crecimiento no inhibido. Si la cantidad de bacterias se duplica en tres horas, ¿cuánto tiempo tardará la colonia en triplicar su número? Considere la fórmula:

$$\boxed{N_{(t)} = N_0 \cdot e^{kt}}$$

Solución:

La cantidad de bacterias en un instante t es:

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{kt}}$$

donde N_0 es la cantidad inicial de bacterias presentes y k es una constante.

La afirmación: «la cantidad de bacterias se duplica en tres horas» significa que

Tiempo	0	3	¿?
N	N_0	$2N_0$	$3N_0$

En este ejercicio no es necesario calcular el valor de N_0.

Por tanto,

$N(3) = 2N_0 = N_0e^{3k}$ Luego, $2 = e^{3k} \Rightarrow k \approx 0{,}231$

Con el valor de k, la fórmula se transforma en $N(t) = N_0e^{0{,}231t}$.

Ahora, el tiempo necesario para que la colonia se triplique requiere de $N_0 = 3N_0$

Sustituyendo en la ecuación anterior y resolviendo para t, obtenemos

$3N_0 = N0e^{0{,}231t}$.

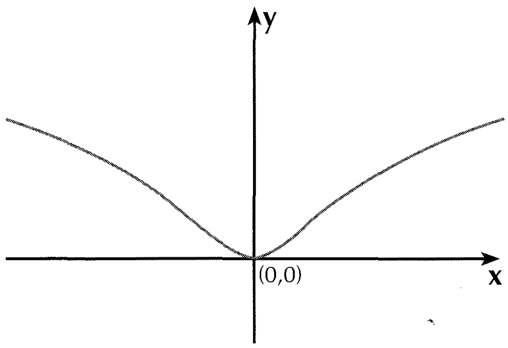
$3 = e^{0{,}231t}$

$\ln(3) = \ln(e^{0{,}231t})$

$\ln(3) = 0{,}231t$

De donde $t = \dfrac{1}{0{,}231} ln 3 \approx 4756$. Es decir, se necesitan 4756 horas para que el número de bacterias se triplique.

5. Analice la gráfica de la función: $f(x) = ln(x^2 + 1)$



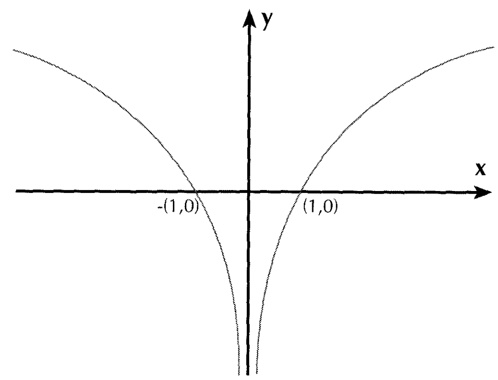
Solución:

- $Dom(f) = \mathrm{R}$.
- $Ran(f) = [0;\infty>$.

Observe que es el mismo proceso de composición de funciones.

- La gráfica de la función es decreciente en el intervalo <-∞;0> y es creciente en el intervalo <0;∞>.
- No tiene asíntotas.
- La gráfica es cóncava hacia arriba.
- Intersecta a los ejes coordenados en el punto (0;0).

6. Analice la gráfica de la función $f(x) = ln\,|x|$



Solución:

- $Dom(f) = R - \{0\}$.
- $Ran(f) = R$.
- La gráfica de la función es decreciente en el intervalo <-∞;0> y es creciente en el intervalo <0;∞>.
- Es asíntota al eje y.
- La gráfica es cóncava hacia abajo.
- Intersecta al eje x en los puntos (-1;0) y (1;0).

Ejercicios propuestos

1. Suponga que se invierten $1000 durante 10 años a 6% compuesto anualmente, sin considerar retiros en ese tiempo.

   Encontrar el monto compuesto.

   Encontrar el interés compuesto.

   R. 1790,9; 790,9

2. La población proyectada P de una ciudad está dada por $P = 100000e^{0,05t}$; donde t es el número de años después de 1990. Hacer un pronóstico de la población para el 2010 y además estimar cuándo la ciudad duplicará su población.

R. 271 828 habitantes; 14 años

3. Una compañía de ventas por correo se anuncia en una revista nacional. La compañía determina que de todas las ciudades pequeñas, el porcentaje (dado como un decimal) en el que exactamente x personas respondan a un anuncio se ajusta a una distribución de Poisson con $\mu = 0,5$

¿En qué porcentaje de ciudades pequeñas puede esperar la compañía que respondan exactamente dos personas?

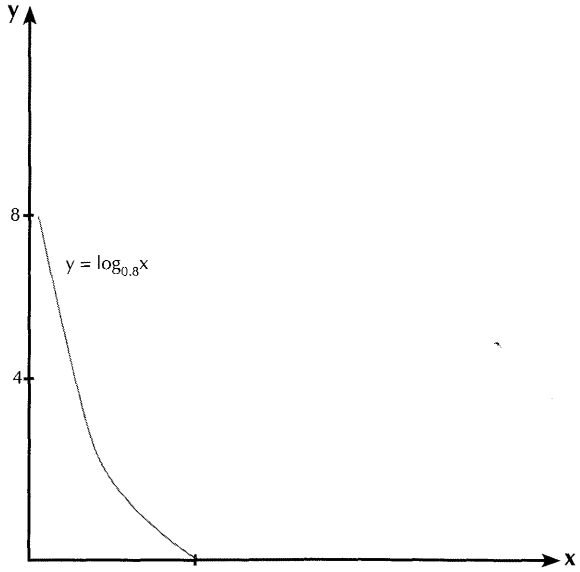
R. 7,58%

4. Si $3000 se invierten en una cuenta de ahorros que genera interés a 4,5% compuesto anualmente, ¿después de cuántos años completos la cantidad al menos se duplicará?

R. 16

5. Suponga que un bote se deprecia 20% cada año. Haga la gráfica del número de años que se conserva el bote como una función de la disminución multiplicativa de su valor original. Marque la gráfica con el nombre de la función.

R.

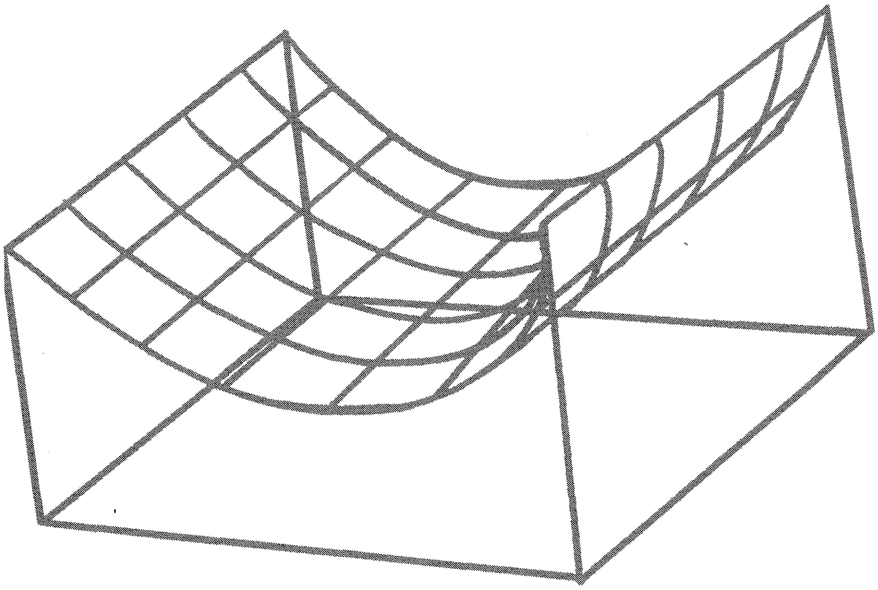


6. En un estudio de bienes secundarios, se resuelve una ecuación de la forma

$$\mu_0 = A\,ln(x_1) + \frac{x_2^2}{2}$$

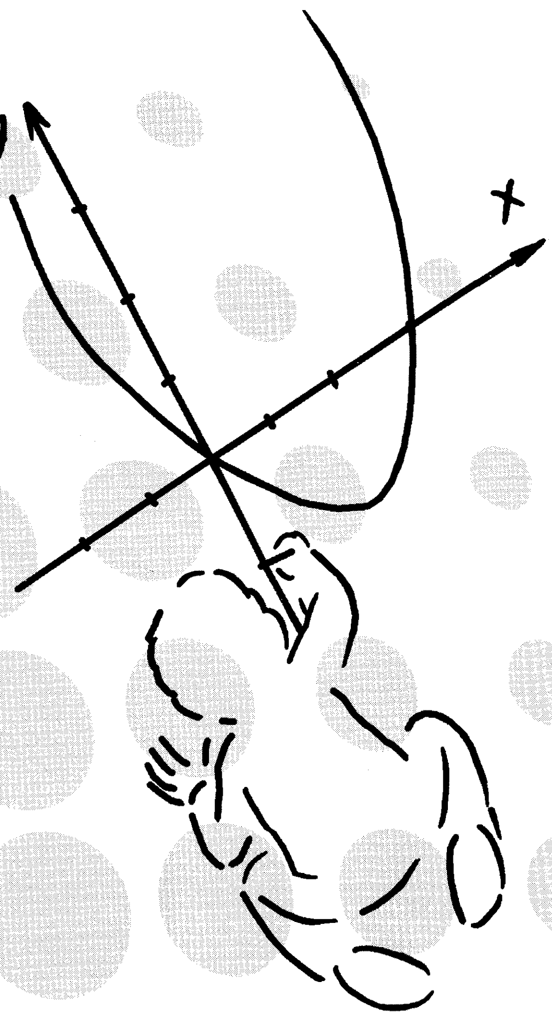
Para x_1, donde x_1 y x_2 son cantidades de dos productos, μ_0 es una medida de la utilidad y A es una constante positiva. Determine x_1.

R. $e^{\left[\mu_0 - \frac{x_2^2}{2}\right]/A}$



UNIDAD V

Cálculo Diferencial



Capítulo 13
LÍMITES

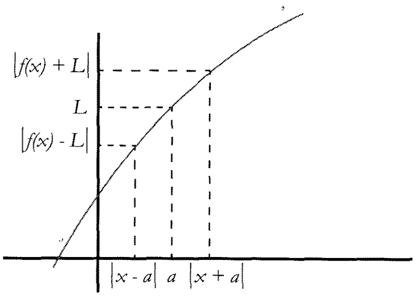
13.1 Definición

El límite de una función $y = f(x)$ es el valor que toma la función (o hacia el que tiende) cuando x toma (o tiende hacia) un determinado valor.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

L es el límite de $f(x)$ cuando $x \to a$; entonces, si fijamos un entorno para L de radio ε, podremos encontrar un entorno para a de radio δ, que depende de ε. Para cualquier valor de x que esté en el entorno $E(a, \delta)$, exceptuando el propio a, se tiene que su imagen $f(a)$ está en el entorno $E(L; \varepsilon)$.

Que x tienda a un determinado valor a, quiere decir que el valor de $|x - a|$ es menor que un valor muy pequeño δ; es decir, $|x - a| \leq \delta$. Del mismo modo, que $f(x)$ tienda a un determinado valor L quiere decir que el valor de $|f(x) - L|$ es menor que un valor muy pequeño ε, es decir, $|f(x) - L| \leq \varepsilon$.



Ejemplo:

1. Demuestre que el límite es el que se indica aplicando la definición:

$$\lim_{x \to 4} (2x + 1) = 9$$

Solución:

Puesto que $2x + 1$ está definido para cualquier número real, cualquier intervalo abierto que contenga a cuatro cumplirá el primer requisito de la definición épsilon-delta. Ahora se debe demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe una $\delta > 0$ tal que

ε = épsilon

δ = delta

$$\text{si } 0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |(2x - 1) - 9| < \varepsilon$$

$$\leftrightarrow \text{si } 0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |2x - 8| < \varepsilon$$

$$\leftrightarrow \text{si } 0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow 2|x - 4| < \varepsilon$$

$$\leftrightarrow \text{si } 0 < |x - 4| < \delta \Rightarrow |x - 4| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

El último enunciado indica que es adecuado tomar $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$. Con esta elección de δ, se establece el siguiente argumento:

$$0 < |x - 4| < \delta \rightarrow 2|x - 4)| < 2\delta \rightarrow |2x - 8)| < 2\delta \rightarrow |(2x + 1) - 9| < 2\delta$$

$$\rightarrow |(2x + 1) - 9| < \varepsilon \text{ (ya que } \delta = \frac{1}{2}\varepsilon)$$

Así, estableciendo que $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$, el siguiente enunciado se cumple:

$$0 < |x - 4| < \delta \rightarrow |(2x + 1) - 9| < \varepsilon$$

Esto demuestra que $\lim_{x \to 4}(2x + 1) = 9$

2. Demuestre que el límite es es el que se indica aplicando la definición:

$$\lim_{x \to -1}(5x + 8) = 3$$

Solución:

Puesto que $5x + 8$ está definido para cualquier número real, cualquier intervalo abierto que contenga a -1 cumplirá el primer requisito de la definición épsilon-delta. Ahora se debe demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que

$$\text{Si } 0 < |x + 1| < \delta \Rightarrow |(5x + 8) - 3| < \varepsilon$$

$$\leftrightarrow \text{si } 0 < |x + 1| < \delta \Rightarrow |5x + 5| < \varepsilon$$

$$\leftrightarrow \text{si } 0 < |x + 1| < \delta \Rightarrow 5|x + 1| < \varepsilon$$

$$\leftrightarrow \text{si } 0 < |x + 1| < \delta \Rightarrow |x + 1| < \frac{1}{5}\varepsilon$$

El último enunciado indica que es adecuado tomar $\delta = \frac{1}{5}\varepsilon$. Con esta elección de δ, se establece el siguiente argumento:

$$0 < |x + 1| < \delta \rightarrow 5|x + 1)| < 5\delta \rightarrow |5x + 5)| < 5\delta \rightarrow |(5x + 9) - 3| < 5\delta$$

$$\rightarrow |(5x + 8) - 3| < \varepsilon \text{ (ya que } \delta = \frac{1}{5}\varepsilon)$$

Así, estableciendo que $\delta = \frac{1}{5}\varepsilon$, el siguiente enunciado se cumple:

$$0 < |x + 1| < \delta \rightarrow |(5x + 8) - 3| < \varepsilon$$

Esto demuestra que $\lim_{x \to -1}(5x + 8) = 3$

Observe detenidamente este procedimiento. Verá cuán sencillo es.

13.2 Propiedades

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
2. $\lim\limits_{x \to a} K f(x) = K \lim\limits_{x \to a} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) + g(x)\right) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
4. $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) \,.\, g(x)\right) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \,.\, \lim\limits_{x \to a} g(x)$
5. $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x) / g(x)\right) = \lim\limits_{x \to a} f(x) / \lim\limits_{x \to a} g(x)$
6. $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x)\right)^k = (\lim\limits_{x \to a} f(x))^k$
7. $\lim\limits_{x \to a} \left(f(x)\right)^{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \left(f(x)\right)^{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$

Valores indeterminados: al aplicar las propiedades, debemos evitar las siguientes expresiones:

$$\frac{0}{0};\quad \frac{\infty}{\infty};\quad 0^{\infty};\quad \infty^0;\quad \infty - \infty;\quad 1^{\infty};\quad 0.\infty$$

Estas expresiones son indeterminadas, pues no está definido su valor. En estos casos, debemos, a partir de factorizaciones u operaciones similares, levantar la indeterminación.

Primero debe reemplazar el valor hacia el que tiende x en la expresión. Si obtiene una expresión indeterminada, deberá levantar dicha indeterminación mediante operaciones algebraicas.

Ejemplos:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 + 2x - 1\right)$

   Solución:

   $f(x) = x^2 + 2x - 1$: función polinomial

   $f(2) = 2^2 + 2(2) - 1 = 7$

   Por lo tanto, según la propiedad $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

   $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^2 + 2x - 1\right) = 7$

2. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

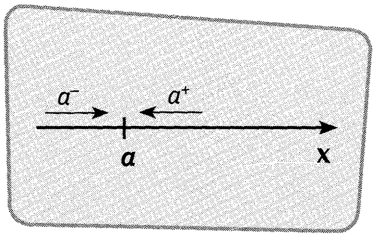
   Solución:

   Si pretendiéramos aplicar el límite directamente a partir de la propiedad $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, nos daría la forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Por ello, se debe factorizar y luego simplificar la expresión antes de poder hacer uso de la propiedad

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)\left(x^2 - 2x + 4\right)}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \left(x^2 - 2x + 4\right)$$

$$= (-2)^2 - 2(-2) + 4 = 4 + 4 + 4; \;\therefore\; \lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = 12$$

13.3 Límites laterales



Dado un valor a, x puede tender a dicho valor por la izquierda (es decir, se acerca tomando valores menores que a) o por la derecha (es decir, se acerca tomando valores mayores que a). El primer caso (el acercamiento por la izquierda) se denota como $x \to a^-$; y el acercamiento por derecha, como $x \to a^+$.

Hemos visto en la definición de límite que si existe ε, tal que $|f(x) - L| \leq \varepsilon$, debe haber un δ tal que $|x - a| \leq \delta$. Ahora bien, al $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ se le llama límite por izquierda, y al $\lim\limits_{x \to a+} f(x)$ se le llama límite por derecha.

Ejemplos:

1. Si $f(x) = \begin{cases} 2 & si \quad x < 1 \\ -1 & si \quad x = 1 \\ -3 & si \quad x > 1 \end{cases}$

:

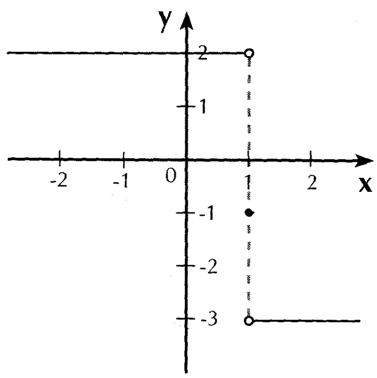
a) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$; c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (-3) = -3$

b) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2) = 2$

c) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$: no existe porque $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$



2. $f(x) = \begin{cases} x + 4 & si \quad x \leq -4 \\ 4 - x & si \quad x > -4 \end{cases}$, halle:

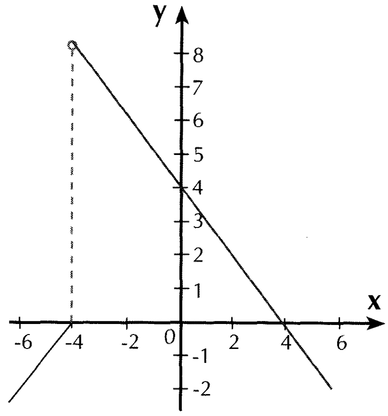
a) $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$; b) $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x)$; c) $\lim\limits_{x \to -4} f(x)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -4^+} (4 - x) = 4 - (-4) = 8$

b) $\lim\limits_{x \to -4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -4^-} (x + 4) = -4 + 4 = 0$

c) $\lim_{x \to -4} f(x)$: no existe porque $\lim_{x \to -4^+} f(x) \neq \lim_{x \to -4^-} f(x)$



13.4 Continuidad

Cuando en una función los límites por derecha y por izquierda, en un punto dado, coinciden con el valor que toma la función en ese punto, se dice que, en ese mismo punto, la función es continua. De lo contrario, se trata de una función discontinua.

Existen cuatro tipos de discontinuidades:

13.4.1 Discontinuidad evitable: cuando existe $\lim_{x \to a} f(x)$, pero no coincide con $f(a)$ o no está definida la función para $x = a$.

13.4.2 Discontinuidad de salto: cuando los límites por derecha y por izquierda en un punto dado no coinciden.

13.4.3 Discontinuidad asintótica: cuando alguno de los límites laterales es asintótico.

13.4.4 Discontinuidad esencial: cuando alguno de los límites laterales no está definido.

Ejemplos:

1. Considere la función f definida por

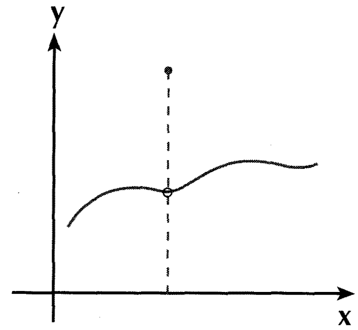
$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & si \quad x \leq 1 \\ x^2+3 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Analice la continuidad de f en el punto $x = 1$. Si f es discontinua, clasifique su discontinuidad.

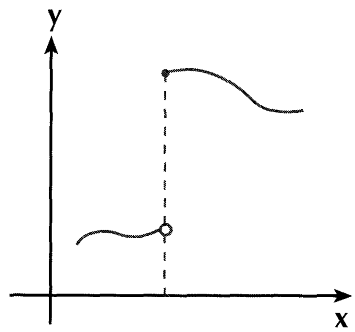
Solución:

Se debe analizar si f satisface las condiciones para ser continua en $x = 1$:

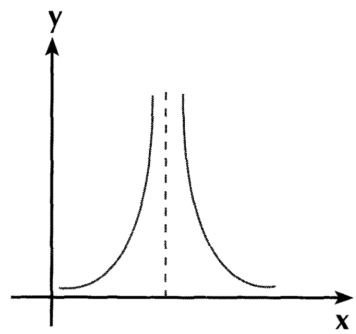
Discontinuidad evitable



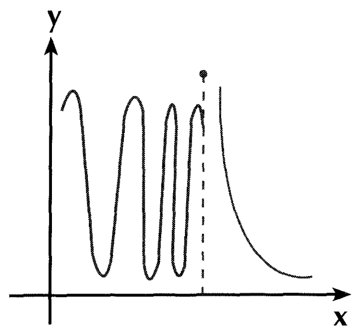
Discontinuidad de salto



Discontinuidad asintótica



Discontinuidad esencial



i) $f(1) = 2(1) + 1 = 3$ (existe)

ii) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2+3 = 4 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 2x+1 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe

De *i* y *ii* se concluye que f no es continua en el punto $x = 2$

Además, como $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ no existe, la discontinuidad es esencial y no puede evitarse.

2. Averigüe si estas funciones son continuas en $x = 2$

a) $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & si \quad x<2 \\ 6-x & si \quad x \geq 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & si \quad x \leq 2 \\ 2x+1 & si \quad x>2 \end{cases}$

Solución:

a) Tenemos:

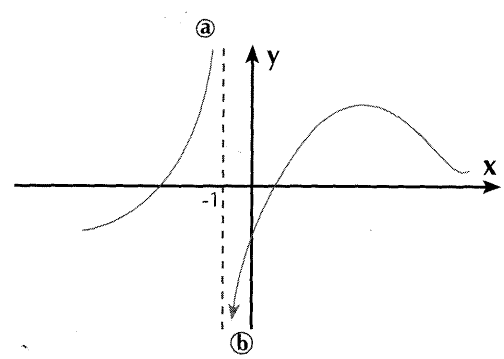
$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3x-2) = 4 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (6-x) = 4 \\ f(2) = 6-2 = 4 \end{array}\right\}$ $f(x)$ es continua en $x = 2$, puesto que $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$

b) Tenemos:

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (x^2-1) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2x+1) = 5 \\ f(2) = 2^2-1 = 3 \end{array}\right\}$ $f(x)$ no es continua en $x = 2$, puesto que no existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Ejercicios resueltos:

1. Describa mediante límites las siguientes gráficas de funciones:

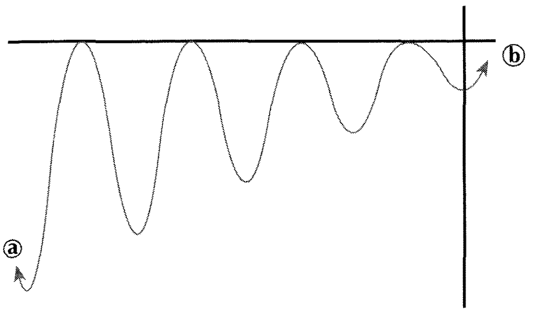


Solución:

a. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$

b. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$

En conclusión, no existe límite cuando x tiende *a* -1.

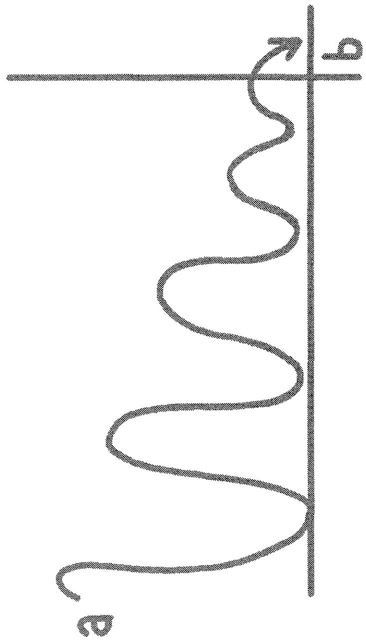
2. 

Solución:

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ no existe;

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3. Demuestre que el límite es el que se indica aplicando la definición:
$\lim\limits_{x \to 3} (7 - 3x) = -2$



Solución:

Puesto que 7-3x está definido para cualquier número real, cualquier intervalo abierto que contenga a 3 cumplirá el primer requisito de la definición épsilon-delta. Ahora se debe demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\text{Si } 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(7 - 3x) + 2| < \varepsilon$$

$$\leftrightarrow \text{si } 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |9 - 3x| < \varepsilon$$

$$\leftrightarrow \text{si } 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow 3|x - 3| < \varepsilon \;(|3 - x| = |x - 3|)$$

$$\leftrightarrow \text{si } 0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow 3|x - 3| < \frac{1}{3}\varepsilon$$

El último enunciado indica que es adecuado tomar $\delta = \frac{1}{3}\varepsilon$. Con esta elección de δ, se establece el siguiente argumento:

$$0 < |x - 3| < \delta \rightarrow 3|(x - 3)| < 3\delta \rightarrow 3|3 - x| < 3\delta \rightarrow |(9 - 3x)| < 3\delta$$

$$\rightarrow |(7 - 3x) + 2| < 3\delta \rightarrow |(7 - 3x) + 2| < \varepsilon \text{ (ya que } \delta = \frac{1}{3}\varepsilon)$$

Así, estableciendo que $\delta = \frac{1}{3}\varepsilon$, el siguiente enunciado se cumple:

$$0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |(7 - 3x) - (-2)| < \varepsilon$$

Esto demuestra que $\lim\limits_{x \to 3} (7 - 3x) = -2$

4. Demuestre que el límite es el que se indica aplicando la definición:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$$

Solución:

Factorizando el numerador y luego simplificando el límite, se transformará en

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}=\lim_{x\to -1}x-1=-2$$

Como x - 1 está definido $\forall x \in R$, cualquier intervalo abierto que contenga a -1 cumplirá con el primer requisito de la definición épsilon-delta.

Ahora, se debe demostrar que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$

Si $0 < |x + 1| < \delta \Rightarrow |(x - 1) + 2| < \varepsilon$

$\leftrightarrow$ si $0 < |x + 1| < \delta \Rightarrow |x + 1| < \varepsilon$

El último enunciado muestra que es adecuado tomar $\delta = \varepsilon$. Con esta elección de δ, se establece el siguiente argumento:

$0 < |x+ 1| \rightarrow |x + 1 + (1 - x)| < \delta \rightarrow |(x - 1) + 2| < \delta \rightarrow |(x - 1) + 2| < \varepsilon$

Así, estableciendo que $\delta = \varepsilon$, el siguiente enunciado se cumple:

Si $0 < |x + 1| < \delta \Rightarrow |(x - 1) + 2| < \varepsilon$

Esto demuestra que $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x+1}=-2$

Evalúe los siguientes límites indicando la propiedad o las propiedades que se aplican en cada paso:

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$

Solución:

No se puede aplicar el límite directamente, pues daría la forma indeterminada $0/0$. No obstante, luego de multiplicar tanto el numerador como el denominador por la conjugada de la expresión en el numerador, y luego reduciendo y simplificando, se puede aplicar la propiedad $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ para hallar el límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+2-2}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2}\right)}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{0+2}+\sqrt{2}}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Recuerde el producto notable

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

6. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3+8}{x^4-16}$

Solución:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)(x^2+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2-2x+4}{(x-2)(x^2+4)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16}=\frac{(-2)^2-2(-2)+4}{(-2-2)((-2)^2+4)}=\frac{4+4+4}{-4(8)}=-\frac{12}{32};$$

$$\therefore \lim_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16}=-\frac{3}{8}$$

Recuerde el producto notable

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) =$

$a^3 - b^3$

Trace la gráfica de cada función y determine su límite indicado, si existiera.

7. $f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x\le 2 \\ 8-2x & si \quad x>2 \end{cases}$

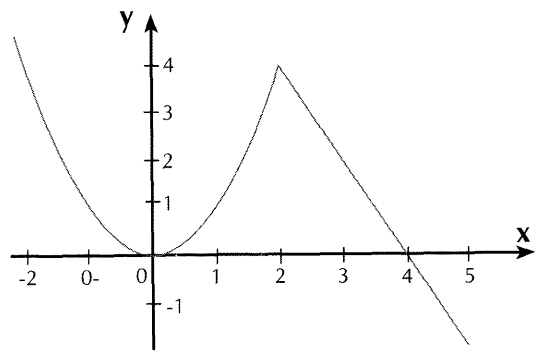
a) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$; b) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$; c) $\lim_{x\to 2} f(x)$

Solución:

a) $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(8-2x)=8-2(2)=4$

b) $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} x^2=2^2=4$

c) $\lim_{x\to 2} f(x)=4$



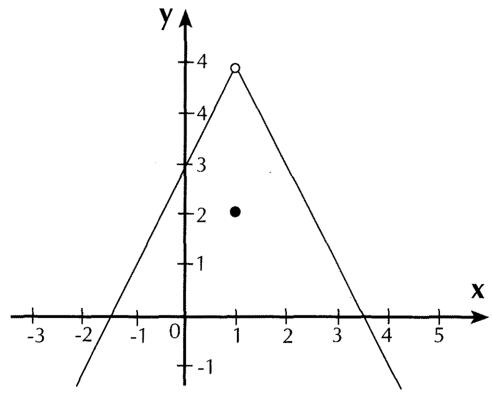
8. $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & si \quad x<1 \\ 2 & si \quad x=1 \\ 7-2x & si \quad x>1 \end{cases}$

Solución:

a) $\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(7-2x)=7-2(1)=5$

b) $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(2x+3)=2(1)+3=5$

c) $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$



9. Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4}; & x \neq 2 \\ 4; \; x = 2 & \end{cases}$$

Analice la continuidad de f en el punto $x = 2$; si no es continua, clasifique su discontinuidad.

Solución:

Se debe analizar si f satisface las condiciones para ser continua en $x = 2$,

i) $f(2) = 4$ (existe)

ii) $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$

$= \lim_{x \to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \dfrac{1}{(x+2)} = \dfrac{1}{4}$ (existe)

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$

iii) $\lim_{x \to 2} f(x) = \dfrac{1}{4} \neq f(2) = 4$

Como falta esta última condición, f no es continua en $x = 2$.

Ahora, puesto que $\lim_{x \to 2} f(x) = \dfrac{1}{4}$ existe, la discontinuidad es removible o evitable en $x = 2$

10. Considere la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 6a & si \quad x < -3 \\ 3ax - 7b & si \quad -3 \leq x \leq 3 \\ x - 12b & si \quad x > 3 \end{cases}$$

Determine los valores de las constantes a y b para que f sea continua en todo su dominio.

Solución:

Como f es continua en todo su dominio, lo es en particular en los puntos $x = -3$ y $x = 3$.

De la continuidad de f en el punto $x = -3$, se deduce que

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^+} f(x) = f(-3) \text{ .... } (1)$$

> Fíjese bien.
> Este es un ejercicio de sistemas de ecuaciones.

Pero $\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} f(3x+6a) = -9+6a$ .... (2)

Y $\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} (3ax-7b) = -9a-7b = f(-3)$...... (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$-9 + 6a = -9a-7b \Leftrightarrow 15a + 7b = 9$ .... (4)

De la continuidad de f en el punto $x = 3$, se deduce que

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) \text{ .... } (5)$$

Pero $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(ax-7b) = -9a-7b = f(3)$ ...... (6)

También, $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x-12b) = 3-12b$ .... (7)

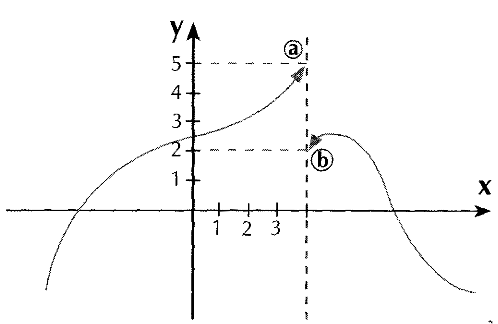
Sustituyendo (6) y (7) en (5), se obtiene

$9a - 7b = 3 - 12b \Leftrightarrow 9a + 5b = 3$.. (8)

Al resolver simultáneamente las ecuaciones (4) y (8), se obtienen finalmente los valores:

$$a = 2 \quad \text{y} \quad b = -3$$

11. Describa mediante límites las siguientes gráficas de funciones:



Solución:

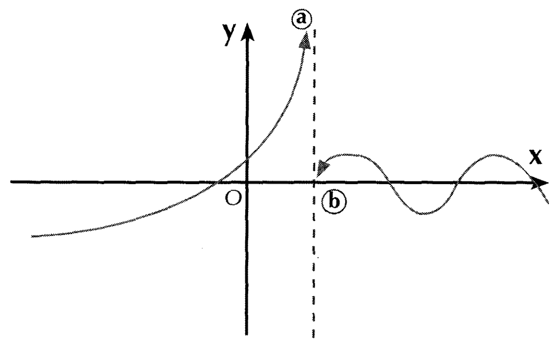
a) $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 5$

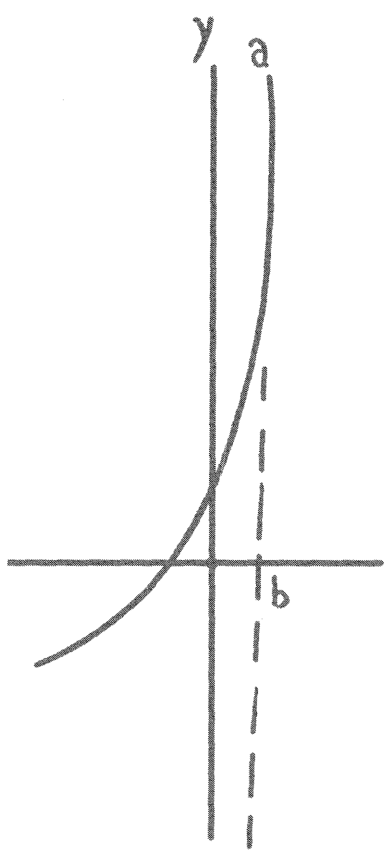
b) $\lim_{x\to 4^+} f(x) = 2$

Por tanto, se concluye que no existe el límite cuando x tiende a 4.

Observe que no existen límites en las restricciones verticales.

12.





Solución:

a) $\lim\limits_{x \to \pi^-} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to \pi^+} f(x) = 0$

Se aprecia que no existe el límite cuando x tiende a π: la función es discontinua.

Ejercicios propuestos

1. Demuestre que el límite es el que se indica aplicando la definición $\lim\limits_{x \to 6}(3x+4) = 22$

2. Demuestre que el límite es el que se indica aplicando la definición $\lim\limits_{x \to -3}(5-3x) = 14$

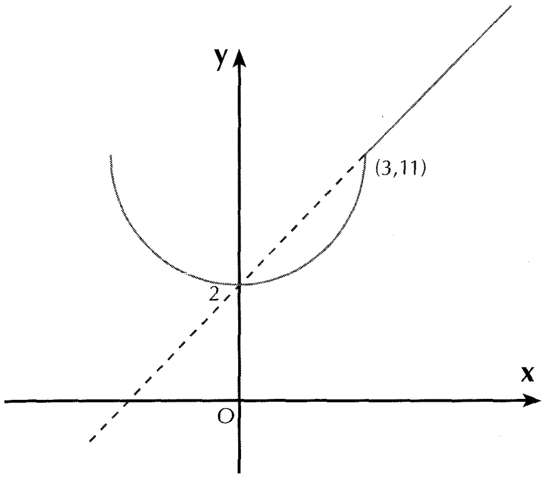
3. Evalúe los siguientes límites indicando la propiedad o las propiedades que se aplican en cada paso:

   a. $\lim\limits_{x \to -3/2} \dfrac{4x^2-9}{2x+3}$ R. -6

   b. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x-5}{5x-1}$ R. 1/2

4. Trace la gráfica y determine el límite indicado de cada función si existe:

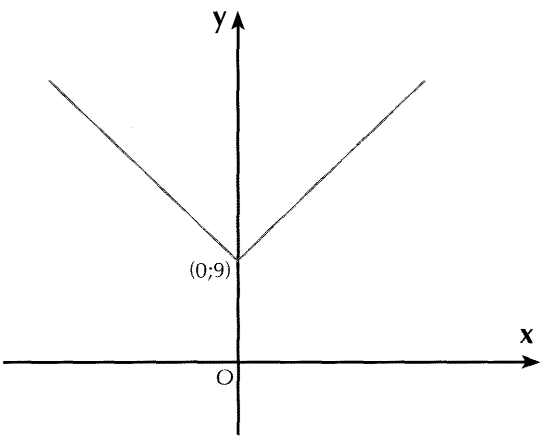
   i. $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & si \quad x \leq 3 \\ 3x+2 & si \quad x > 3 \end{cases}$



a) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$; b) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$; c) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

R. 11 R. 11 R. 11

ii. $f(x) = \begin{cases} 9 - x & si \quad x < 0 \\ 9 & si \quad x = 0 \\ x + 9 & si \quad x > 0 \end{cases}$



a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$; b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$; c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

R. 9 R. 9 R. 9

5. En los siguientes ejercicios, determine los números en los cuales es continua la función dada.

a. $f(x) = x^2(x + 3)^2$ R. $\mathbb{R}$

b. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+5}$ R. $\mathbb{R} - \left\{ -\dfrac{5}{2} \right\}$

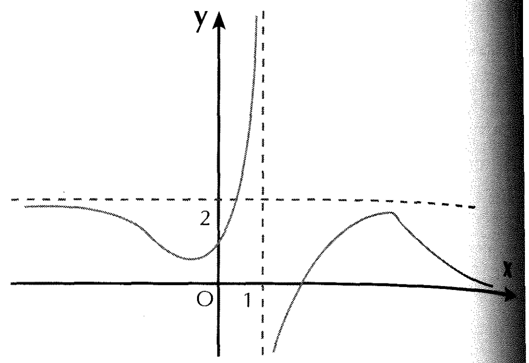
6. Represente una función que verifique las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=-\infty$$

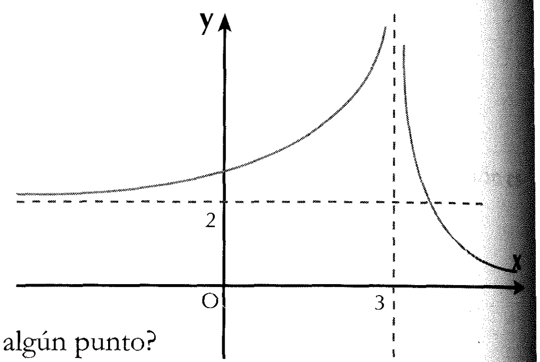


7. Represente una función que cumpla las siguientes condiciones:

$$\lim_{x\to3} f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$



¿Es discontinua en algún punto?

R. Es discontinua en 3.

8. Si c es el costo total en dólares para producir q unidades de un producto, entonces el costo promedio por unidad para una producción de q unidades está dado por $c = c/q$. Así, si la ecuación de costo total es $c = 5000 + 6q$, entonces

$$c=\frac{5000}{q}+6$$

Por ejemplo, el costo total para la producción de cinco unidades es \$5030, y el costo promedio por unidad en este nivel de producción es \$1006. Por medio de la determinación de $\lim_{x\to\infty} c$, demuestre que el costo promedio se aproxima a un nivel de estabilidad si el productor aumenta de manera continua la producción. ¿Cuál es el valor límite del costo promedio?

R. \$6

9. La función

$$y=f(x)=\begin{cases}-100x+\ 600, & si\ \ 0\le x<5\\ -100x+1100, & si\ \ 5\le x<10\\ -100x+1600, & si\ \ 10\le x<15\end{cases}$$

describe el inventario y de una compañía en el instante x.
¿F es continua en 2? ¿Es continua en 5? ¿Es continua en 10?

R. Es continua en 2, y discontinua en 5 y en 10.

10. Si se prestan \$5000 a una tasa de interés del 12% por año, compuesto continuamente, y el préstamo va a ser reembolsado en un pago al final de un año, ¿cuánto debe reembolsar el prestatario? ¿Y si se impone continuamente capitalizar semestralmente por un año y medio?

Emplear: $S = pe^{rt}$

R. \$5637,50; \$5986,09

11. Una «anualidad» en la que A soles se pagan cada año por medio de pagos uniformes, se llama anualidad continua. El valor presente de la anualidad continua durante t años es:

$A \bullet \dfrac{1-e^{-rt}}{r}$, donde r es la tasa de interés compuesto continuamente.

Determine el valor presente de una anualidad continua de 100 soles durante 20 años impuestos al 5% compuesto de manera continua. Aproxime la respuesta a la unidad monetaria más cercana.

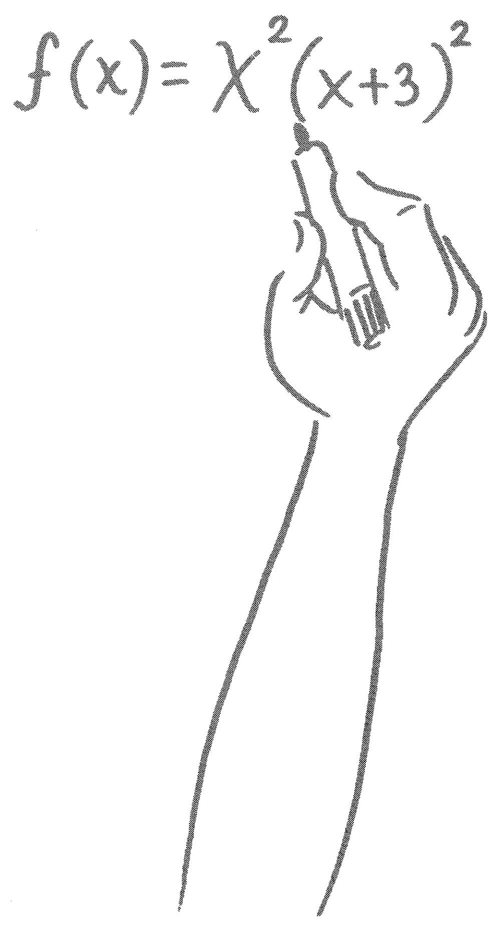
R. S/. 1264

12. Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad de huéspedes (número de huéspedes en una determinada área) es x, el número de huéspedes parasitados en un período es:

$$y = \frac{900x}{10+45x}$$

Si la densidad de huéspedes estuviese aumentando indefinidamente, ¿a qué valor se aproxima la función?

R. 20



13. La población de cierta ciudad pequeña en t años a partir de este instante se puede modelar de la siguiente manera:

$$P = 20000 + \frac{10000}{\left(t+2\right)^2}$$

Determine la población que se tendrá en el largo plazo, es decir, cuando el número de años tienda al infinito.

R. 20 000

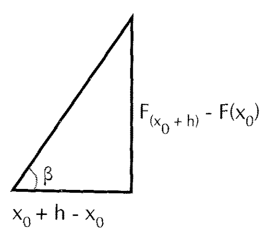
Capítulo 14
DERIVADAS

14.1 Definición

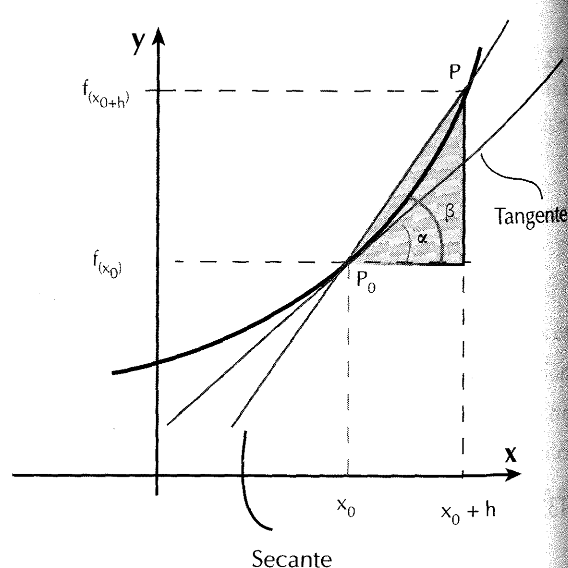
La derivada
disminuye a la
función en un grado.

La derivada de una función en un punto dado es un valor que mide el cambio que sufre la función en dicho punto. Geométricamente, la derivada de una función en un punto dado es la pendiente de la recta que es tangente a la curva en dicho punto. Dada una función $f(x)$, su derivada se denota por $f'(x)$.

Si para una función $f(x)$ x toma un determinado valor x_0, tendremos un punto en la gráfica de $f(x)$. Si x toma un valor $x_0 + h$, donde h es un valor pequeño, tendremos otro punto en la gráfica de $f(x)$. Si los valores de h se hacen cada vez más pequeños, la recta que pasa por los puntos del gráfico tenderá a coincidir con el valor de la tangente en el punto $f(x_0)$. Vemos esto en el gráfico.



$$Tg\beta = \frac{f_{(x_0+h)} - f_{(x_0)}}{h}$$



Recuerde lo visto
anteriormente sobre
la pendiente de una
recta.

El objetivo del procedimiento que sigue es hallar la derivada, es decir, la pendiente de la recta tangente. En el gráfico podemos ver que dicha pendiente es igual a $Tg\,\alpha$, es decir, que $f'(x) = Tg\,\alpha$.

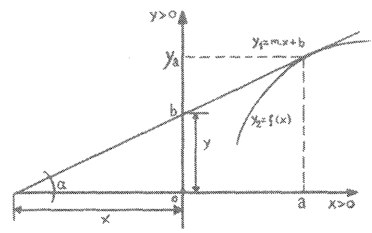
Observe que si el valor de h es suficientemente pequeño, la recta secante se acercará a la recta tangente. β es el ángulo de la recta secante. Objeto $Tg\,\beta$ es la pendiente de esa recta.

Tenemos:

$tan\ \beta = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}$. Si eliminamos los paréntesis del denominador, tendremos $tan\ \beta = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Sabemos que cuando $h \longrightarrow 0$, ocurre que de $\beta \longrightarrow a$. Si aplicamos el concepto de límite, tendremos:

$$tan\ \alpha = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$



La derivada de una función se puede denotar también por $D_x(f(x))$.

Si $y = f(x)$, entonces la derivada de la función y respecto de la variable x será:

$$\frac{dy}{dx} = D_x\left(f_{(x)}\right) = f'_{(x)}$$

De donde $dy = f'(x)\ dx$

14.2 Funciones algebraicas

Las reglas para derivar una función polinómica son las siguientes:

1. $D_x[x^n] = nx^{n-1}$
2. Derivada de una suma: $D_x[f(x) + g(x)] = D_x[f(x)] + D_x[g(x)]$
3. Derivada de un producto: $D_x(uv) = uD_x(v) + vD_x(u)$
4. Derivada de un cociente $D_x\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vD_x(u) - uD_x(u)}{v^2}$

Ejemplos:

1. Calcule la derivada de $f(x) = 2x^2$ partiendo de la definición y aplicando la primera regla.

Solución:

a. Derivamos aplicando la definición:

Si $f(x) = 2x^2$, entonces

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2 - 2(x)^2}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2(x^2+2xh+h^2)-2x^2}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{2x^2+4xh+2h^2-2x^2}{h}$$

$\lim_{h \to 0} \frac{4xh + 2h^2}{h}$. Si aplicamos directamente el límite, tendremos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. Para levantar esta determinación, debemos factorizar h en el numerador:

$$\lim_{h \to 0} \frac{h(4x + 2h)}{h}$$

Simplificamos h y, así, levantamos la indeterminación.

$$\lim_{h \to 0} 4x + 2h$$

Ahora sí podemos calcular el límite:

$$f'(x) = 4xdx$$

b. Derivamos aplicando la regla:

Dada la ecuación $f(x) = 2x^2$ y aplicando las propiedades de la derivada, tenemos:

$D[2x^2] = 2 \, . \, (2x)$
$= 4x$

Vemos que se cumple la propiedad señalada.

Recuerde

$D_x(x^n) = nx^{n-1}$

2. Calcule la primera derivada de la función $f(x) = 3\sqrt[7]{x^2}$.

Solución:

Dada la ecuación $f(x) = 3\sqrt[7]{x^2}$ y aplicando las propiedades de la derivada, tenemos:

$$D_x\left[3\sqrt[7]{x^2}\right] = D_x(3x^{\frac{2}{7}}) = 3 \cdot \left(\frac{2}{7}x^{\frac{2}{7}-1}\right) = \frac{6}{7}x^{-5/7}$$

3. Derive la función algebraica $f(x) = 7x - 5$.

Solución:

Dada la ecuación $f(x) = 7x - 5$ y aplicando las propiedades de la derivada, tenemos:

$$D_x[7x - 5] = D_x(7x) - D_x(5) = 7D_x(x) - 0 = 7$$

4. Derive la función algebraica $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$.

Solución:

Dada la ecuación $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 1$ y aplicando las propiedades de la derivada, tenemos:

$$D_x[3x^4 - 5x^2 + 1] = D_x(3x^4) - D_x(5x^2) + D_x(1) = 3(4x^{4-1}) - 5(2x^{2-1})$$
$$= (12x^3 - 10x^3)$$

14.3 Regla de la cadena

La regla de la cadena es un método para calcular la derivada de funciones compuestas.

Dada una función $h(x) = (fog)(x)$, entonces la derivada de $h(x)$ será:

$$h'(x) = f'(g(x)).\, g'(x)$$

1. Derive la función $f(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$.

Solución:

Empleando la regla de la cadena, tenemos:

$$f'(x) = D_x[(x^2 - 4x - 5)^4] = 4(x^2 + 4x - 5)^{4-1}D_x(x^2 + 4x - 5)$$
$$4(x^2 + 4x - 5)^3(2x + 4)$$
$$\Rightarrow\ 8(x^2 + 4x - 5)^3(x + 2)$$

Aplicando la regla de la cadena, evite desarrollar expresiones muy complejas como la del ejemplo 1.

2. Derive la función $f(x) = (x^2 + 4)^{-2}$.

Solución:

Empleando la regla de la cadena, tenemos:

$$f'(x) = D_x[(x^2 + 4x)^{-2}] = -2(x^2 + 4)^{-2-1}D_x(x^2 + 4) = -2(x^2 + 4)^{-3}(2x)$$

$$\Rightarrow -\frac{4x}{(x^2+4)^3}$$

14.4 Funciones trascendentes

Las funciones que no son algebraicas reciben el nombre de funciones trascendentes.

En este capítulo, estudiaremos tres funciones trascendentes: funciones trigonométricas, funciones exponenciales y funciones logarítmicas.

14.4.1 Funciones trigonométricas:

Las reglas para derivar funciones trigonométricas son las siguientes:

a. $D_x[sen\ \alpha] = cos\ \alpha$

b. $D_x[cos\ \alpha] = -sen\ \alpha$

c. $D_x[tan\ \alpha] = sec^2\ \alpha$

d. $D_x[cot\ \alpha] = -csc^2\ \alpha$

e. $D_x[sec\ \alpha] = sec\ \alpha\ .\ tan\ a$

f. $D_x[csc\ \alpha] = csc\ \alpha\ .\ ctg\ a$

Ejemplos

1. Halle la derivada de la función $f(x) = 4secx - 2cscx$

   Solución:

$$D[4secx - 2cscx] = D_x[4secx] - D_x[2cscx]$$
$$4D_x[secx] - 2D_x[secx] = 4(secx \, . \, tgx) - 2(-cscx \, . \, ctgx)$$
$$(4sec \, . \, tgx + 2cscx \, . \, ctgx)$$

2. Halle la derivada de la función $f(x) = 3secx \, . \, tgx$

   Solución:

$$D_x[3secx \, . \, tgx] = 3D_x[secx \, . \, tgx] = 3(secx \, D_x[tgx] + tgx \, D_x \, [secx])$$
$$3(secx(\sec^2 x) + tgx(secx \, . \, tgx) = (3sec^3 x + 3tg^2 x \, . \, secx)$$

Aplicamos la fórmula de la derivada de un producto:

D(uv) = uD(v) + vD(u)

14.4.2 Funciones logarítmicas

Las reglas para derivar funciones logarítmicas son las siguientes:

a. $D_x(ln\, x) = \dfrac{1}{x}$

b. $D_x(log_b x) = \dfrac{1}{x\, ln\, b}$

Ejemplos:

1. Halle la derivada de $ln\, x^2$

   Solución:

   Empleando la regla de la cadena

$$D_x(ln\ x^2) = \frac{1}{x^2} D_x(x^2) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$$

2. Halle la derivada de la función $f(x) = x \, . \, ln\, x$

   Solución:

   De acuerdo con la derivada del producto:

$$D_x(x.ln\, x) = x \cdot D_x(ln\, x) + ln\, x = x \cdot \frac{1}{x} + ln\, x = (1 + ln\, x)$$

14.4.3 Funciones exponenciales

Las reglas para calcular derivadas de funciones exponenciales son:

a. $D_x \lfloor e^x \rfloor = e^x$

b. $D_x \lfloor a^x \rfloor = a^x \, . \, lna$

> Revise el tema de las funciones exponenciales y logarítmicas en el capítulo 12.

Ejemplos:

1. Halle la derivada de la función $f(x) = e^{x^2}$

   Solución:

   De acuerdo con la regla de la cadena

   $D_x(e^{x^2}) = e^{x^2}\, D(x^2) = e^{x^2}\,(2x) = 2xe^{x^2}$

2. Halle la derivada de la función $f(x) = xe^2$

   Solución:

   Por la regla de la derivada del producto

   $f'(x) = D_x(e^x x) = x\,(e^x) + e^x = (xe^x + e^x)$

14.5 Derivación implícita

Las funciones del tipo $y = f(x)$ se llaman funciones explícitas porque el valor de y está expresado en función de x de manera evidente. Sin embargo, existen funciones en las que no es tan sencillo despejar y para poder obtener la regla de correspondencia. A estas funciones se les conoce como funciones implícitas.

Por ejemplo, la función implícita $xy = 1$ se puede expresar explícitamente como $y = \frac{1}{x}$.

Sin embargo, en la función $x^2y + 3xy^3$ no es tan sencillo despejar el valor de y.

Si queremos calcular $f'(x)$ en estos casos, es útil el método para la derivación implícita.

Una función implícita toma la forma de una ecuación. Para derivarla, debemos hallar la derivada de cada uno de sus miembros y despejar $\frac{dy}{dx}$.

> Recuerde que
>
> $$D_x(y) = \frac{dy}{dx}$$
>
> Ahora veremos cuán útil es expresar las derivadas de esa manera.

Ejemplos:

1. Derive implícitamente $x^2 + y^2 = 16$.

   Solución:

   Sea $x^2 + y^2 = 16$

   $\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(16)$

Incluso las funciones explícitas se pueden derivar como implícitas. Inténtelo.

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y.\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$D_x(x) = \frac{x}{y}$$

2. Derive implícitamente: $x^3 + y^3 = 8xy$.

Solución:

Sea $x^3 + y^3 = 8xy$,

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) = \frac{d}{dx}(8xy)$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 8y + 8x\frac{dy}{dx}$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 8y + 8x\frac{dy}{dx} \Leftrightarrow 3y^2\frac{dy}{dx} - 8x\frac{dy}{dx} = 8y + 3x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{8y - 3x^2}{3y^2 - 8x}$$

14.6 Derivadas de orden superior

- La segunda derivada se obtiene derivando la primera derivada.
- La tercera derivada se obtiene derivando la segunda; y así sucesivamente.

Dada una función $y = f(x)$, decimos que $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ es su primera derivada.

Si derivamos nuevamente a esta función, obtendremos la segunda derivada:

$$D_x(f'(x)) = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Así podemos hallar la tercera derivada $f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$ y las demás sucesivamente.

A estas derivadas se les llama de orden superior.

Ejemplos:

1. Halle la tercera derivada $\left(\dfrac{d^3}{dx^3}\right)$ de la función $f(x) = x^5 + x^2 + 1.$

Solución:

Para la primera derivada, obtenemos:

$$f'(x) = D_x(x^5 + x^2 + 1) = 5x^4 + 2x$$

Para la segunda derivada:

$$f''(x) = D_x(5x^1 + 2x) = 20x^3 + 2$$

Para la tercera:

$$f'''(x) = D_x(20x^3 + 2) = 60x^2$$

2. Halle la tercera derivada $\left(\dfrac{d^3}{dx^3}\right)$ de la función $f(x) = e^x x$.

Solución:

Para la primera derivada, obtenemos:

$$f'(x) = D_x(e^x x) = xD_x(e^x) + e^x D_x(x)$$

$$f'(x) = xe^x + e^x$$

Para la segunda derivada:

$$f''(x) = D_x(xe^x + x) = D_x(e^x x) + D_x(e^x)$$

$$f''(x) = xe^x + e^x + e^x = ex^x + 2e^x$$

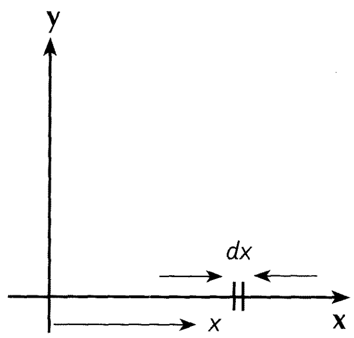
Para la tercera:

$$f'''(x) = D_x(xe^x + 2e^x) = D_x(e^x x) + D_x(2e^x)$$

$$f'''(x) = D_x(e^x x) + 2D_x(e^x)$$

$$f'''(x) = xe^x + e^x + 2e^x = xe^x + 3e^x$$

14.7 Diferenciales



Un diferencial es una longitud infinitamente pequeña. Cuando vimos la definición de derivadas, el incremento h en el valor de x era un diferencial de x. El diferencial de x se denota como dx. Como se puede ver, al resolver los ejercicios de derivadas, ya hemos trabajado con diferenciales. Con el concepto de diferencial y el de derivadas, podemos calcular los valores absolutos de ciertas funciones.

Si evaluamos una función en x aumentado en dx, el resultado será la misma función $f(x)$ aumentada en el producto de su derivada en x.

$$f(x + dx) \approx f(x) + f'(x) \, . \, dx$$

Ejemplos:

1. Calcule mediante diferenciales el valor aproximado de $\sqrt{16,1}$.

Solución:

Por definición de diferencial, tenemos que

$$f(x + dx) \approx f(x) + f'(x) \, . \, dx$$

Consideraremos la función:

$f(x) = \sqrt{x}$ y dado que deseamos calcular $\sqrt{16,1}$, tenemos que $x = 16$ y $dx = 0,1$

Tenemos, entonces, la función $f(x) = \sqrt{x + dx}$.

Y por definición, tenemos:

$$f(x) = \sqrt{x + dx} \approx \sqrt{x} + (D_x \sqrt{x})dx$$

$$= \sqrt{x} + \frac{1}{2}x^{1/2-1}\, dx = \sqrt{x} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \, . \, dx = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

Reemplazamos los valores que definimos al inicio:

$$\sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}} \cdot 0,1 = 4 + 0,0125 = 4,0125$$

Entonces, $\sqrt{16,1} \approx 4,0125$.

2. Empleando diferenciales, calcule el valor aproximado de *sen* 31,5°.

Recuerde las equivalencias entre los sistemas angulares:

$$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}$$

Solución:

Por definición de diferencial, tenemos que

$$f(x + dx) \approx f(x) + f'(x) \,.\, dx$$

Consideraremos la función:

$f(x) = sen\ x$, y dado que deseamos calcular *sen* 31,5°, tenemos que $x = 30°$ y $dx = 1{,}5°$, pero 1,5° está en grados sexagesimales. Debemos convertirlo a radianes.

Así:

$$\frac{S}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{1{,}5}{180} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{1{,}5\pi}{180} = R$$

$$0{,}02618 = R$$

Entonces, $dx = 0{,}02618$

Hallando la derivada de la función:

$$f'(x) = D_x\,[senx] = cosx$$

Evaluando para $x = 30° \Rightarrow f'(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Y reemplazando en la definición de diferencial:

$$f(30°+1{,}5°) \approx f(30°) + f'(30°)\cdot 1{,}5° \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1{,}5° =$$

$$= 0{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{2}.(0{,}02618)$$

$$= 0{,}52267$$

No olvide que

$$\frac{1}{x^n}=x^{-n}$$

Ejercicios resueltos

1. Halle la primera derivada de $f(x)=x^2+3x+\frac{1}{x^2}$.

Solución:

$$D_X[x^2+3x+\frac{1}{x^2}]=D_X[x^2]+D_X[3x]+D_X[x^{-2}]$$

$$=(2x^{2-1})+(3x^{1-1})-2(x^{-2-1})$$

$$=2x+3-\frac{2}{x^3}$$

2. Halle la primera derivada de $f(x)=8x^8+3x^5+\frac{9}{x^2}-x$.

Solución:

$$D_x[8x^8+3x^5+\frac{9}{x^2}-x]=(8)(8)(x^{3-1})1+3(5)(x^{5-1})+9(-2)(x^{-2-1})-1$$

$$=64x^7+15x^4-18x^{-3}-1=64x^7+15x^4-\frac{18}{x^3}-1$$

3. Hallar la derivada de la función $f(x) = (2x^2 + 5)(4x - 1)$.

Solución:

Empleando las propiedades de la derivada del producto, tenemos:

$$D_x[(2x^2 + 5)(4x - 1)] = (2x^2 + 5)D_x[(4x - 1)] + (4x - 1)D_x[(2x^2 + 5)]$$

$$= (2x^2 + 5)(4 - 0) + (4x - 1)(4x + 0)$$

$$= 8x^2 + 20 + 16x^2 - 4x$$

$$= 24x^2 - 4x + 20$$

4. Halle la derivada de la función $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$.

Solución:

Empleando las propiedades de la derivada del cociente, tenemos:

$$D_X(\frac{x}{x^2-1})=\frac{(x^2-1)D_X(x)-(x)D_X(x^2-1)}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{(x^2-1)(1)-(x)(2x-0)}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$$

5. Efectúe la derivada de la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+5}(3x-1)$.

Solución:

Empleando las propiedades de la derivada del producto y del cociente, tenemos:

$$D_X[\frac{2x+1}{x+5}(3x-1)]=\frac{2x+1}{x+5}D_X(3x-1)+(3x-1)D_X\frac{2x+1}{x+5}$$

$$=\frac{2x+1}{x+5}(3-0)+(3x-1)[\frac{(x+5)D_X(2x+1)-(2x+1)D_X(x+5)}{(x+5)^2}$$

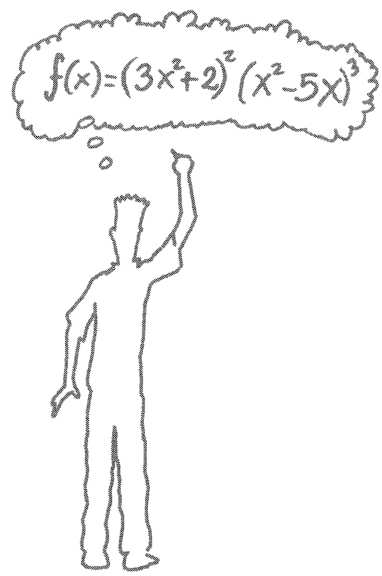
$$=\frac{3(2x+1)}{x+5}+(3x-1)[\frac{(x+5)(2+0)-(2x+1)(1+0)}{(x+5)^2}]$$

$$=\frac{6x+3}{x+5}+\frac{(3x-1)(2x+10-2x-1)}{(x+5)^2}$$

$$=\frac{6x+3}{x+5}+\frac{(3x-1)(9)}{(x+5)^2}=\frac{(x+5)(6x+3)+9(3x-1)}{(x+5)^2}$$

$$=\frac{6x^2+60x+6}{(x+5)^2}$$

$$=\frac{6(x^2+10x+1)}{(x+5)^2}$$



6. Halle la derivada de la función $f(x) = (3x^2 + 2)^2 (x^2 - 5x)^3$.

Solución:

Aplicando la regla de la cadena, tenemos:

$$D_X[(3x^2+2)^2(x^2-5x)^3]=(3x^2+2)^2D_X[(x^2-5x)^3]+(x^2-5x)^3$$

$$D_X[(3x^2+2)^2]$$

$$=(3x^2+2)^2(3(x^2-5x)^2)D_X[(x^2-5x)]$$

$$+(x^2-5x)^3(2(3x^2+2))D_X[(3x^2+2)]$$

$$=(3x^2+2)^2(3)(x^2-5x)^2(2x-5)$$

$$+(x^2-5x)^3(2)(3x^2+2)(6x+0)$$

$$=(3x^2+2)(x^2-5x)^2[3(3x^2+2)(2x-5)$$

$$+2(x^2-5x)(6x)]$$

$$=(3x^2+2)(x^2-5x)^2[30x^3-105x^2$$

$$+12x-30]$$

7. Halle la derivada de la función $f(x) = tg^2x + \sec^3x$.

Solución:

Derivando:

$$\begin{aligned} D_x\,[tg^2x + sec^3x] &= D_x\,[tg^2x] + D_x\,[sec^3x] \\ &= 2tgx D_x(tgx) + 3sec^2x D_x(secx) \\ &= 2tgx\, sec^2x + 3sec^2 x sec\, x tgx \\ &= 2tgx\, sec^2x + 3sec^3\, xtgx = sec^2x(2tgx + 3secx\,.\,tgx) \end{aligned}$$

8. Calcule la derivada de $f(x) = \dfrac{1 - sec\,x}{tgx}$.

Solución:

Por la regla de la cadena, operamos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} D_X\left[\frac{1-sec\,x}{tgx}\right] &= \frac{tgxD_x(1-sec\,x)-(1-sec\,x)D_x tgx}{tg^2x} \\ &= \frac{tgx(-sec\,x\ .\ tgx)-\left[(1-sec\,x)sec^2\,x\right]}{tg^2x} \\ &= \frac{-sec\,x\ .\ tg^2x-\left[sec^2\,x-sec^3\,x\right]}{tg^2x} \\ &= \frac{-sec\,xtg^2x+sec^3\,x-sec^2\,x}{tg^2x} \\ &= \frac{-sec\,xtg^2x+sec^3\,x-sec^2\,x}{tg^2x} = \frac{-sec\,x}{sec\,x-1} \end{aligned}$$

9. Calcule la derivada de la función $f(x) = xln(senx + cosx)$.

Solución:

Aplicaremos la derivada del producto, y luego la regla de la cadena.

$$\begin{aligned} D_x\left[x\,ln(senx+cos\,x)\right] &= ln(senx+cos\,x)D_x(x)+(x)D_x\left[ln(senx+cos\,x)\right] \\ &= ln(senx+cos\,x)(1)+(x)\frac{1}{(senx+cos\,x)}D_x\left[senx+cos\,x\right] \\ &= ln(senx+cos\,x)+(x)\frac{1}{(senx+cos\,x)}(cos\,x-senx) \\ &= ln(senx+cos\,x)+(x)\frac{(cos\,x-senx)}{(senx+cos\,x)} \end{aligned}$$

10. Calcule la derivada de la función $f(x)=\dfrac{ln(x^2)}{x}$.

Solución:

Aplicamos la derivada del cociente y luego la regla de la cadena.

$$\begin{aligned}
D_x(\frac{ln(x)}{x}) &= x\cdot D_x\left[ln\,x^2\right]-ln\,x^2 D_x\left[x\right]\\
&= x\cdot\frac{1}{x^2}D_x\left[x^2\right]-ln\,x^2\\
&= x\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 2x-ln\,x^2\\
&= 2-ln\,x^2
\end{aligned}$$

11. Calcule la derivada de $f(x) = e^{sen\,x}$.

Solución:

Por regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
D_x(e^{sen\,x}) &= e^{senx}D_x[sen\,x]\\
&= e^{senx}cosx
\end{aligned}$$

12. Calcule la derivada de la función: $f(x) = 2^{\cos x^2}$.

Solución:

Empleando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
D_x(2^{\cos x^2}) &= 2^{\cos x^2}\,.\,ln^2\,.\,D_x(\cos x^2)\\
&= 2^{\cos x^2}\,.\,ln^2\,.\,(-senx^2)\,.\,D_x(x^2)\\
&= 2^{\cos x^2}\,.\,ln^2\,.\,(-senx^2)\,.\,2x\\
&= -(x)2^{\cos x^2+1}\,.\,ln^2\,.\,(senx^2)
\end{aligned}$$

Recuerde:

$D_x(a^x) = a^x\,.\,ln^x$

13. Derivar implícitamente $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$.

Solución:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1 \quad\Leftrightarrow\quad x^{-1}+y^{-1}=1$$

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})=\frac{d}{dx}(1)$$

$$-2x^{-2}-2y^{-2}\frac{dy}{dx}=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^{-2}+y^{-2}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^{-2}}{y^{-2}}=-\frac{y^2}{x^2}$$

Observe que en este caso no fue necesario desarrollar el coseno de la diferencia:

Cos(y – y) = CosxCosy + SenxSeny

14. Derive implícitamente $y = cos(x - y)$.

Solución:

$$\frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(\cos(x-y))$$

$$\frac{dy}{dx} = -sen(x-y)\frac{d}{dx}(x-y)$$

$$\frac{dy}{dx} = -sen(x-y)\frac{d}{dx}(x-y)$$

$$\frac{dy}{dx} = -sen(x-y)(1-\frac{dy}{dx}) \Leftrightarrow -\frac{dy}{dx} = sen(x-y) - sen(x-y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sen(x-y)}{sen(x-y)-1}$$

15. Calcule la derivada de $f(x) = x^x$.

Solución:

Muchas veces, la función exponencial es compleja, por lo que es mejor realizar la derivación basándose en la derivada de los logaritmos.

Deberemos tomar logaritmos a las funciones para facilitar el cálculo.

$$ln\, y = ln x^x$$

$$ln\, y = x\, ln\, x$$

$$\frac{d\, ln\, y}{dx} = \frac{d\left(x\, ln\, x\right)}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = ln\, x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(ln\, x + 1\right) = x^x\left(ln\, x + 1\right)$$

16. Obtenga la cuarta derivada de la función $\frac{3}{2x-1}$.

Solución:

Aplicando el método del operador derivado, tenemos:

$$D_x\left(\frac{3}{2x-1}\right) = -6(2x-1)^{-2}$$

$$= D_x\left(-6(2x-1)^{-2}\right) = \left(24(2x-1)^{-3}\right)$$

$$= D_x\left(24(2x-1)^{-3}\right) = \left(-144(2x-1)^{-4}\right)$$

$$= D_x\left(-144(2x-1)^{-4}\right) = 1152(2x-1)^{-5} = \frac{1152}{(2x-1)^5}$$

17. Dada $x^2 + y^2 = 1$, demuestre que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{1}{y^3}$.

Solución:

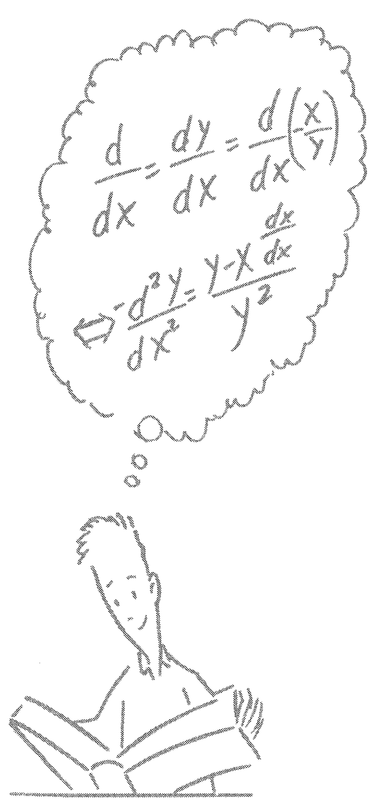
$x^2 + y^2 = 1$ .... (1)

Derivemos respecto de x a ambos lados de la ecuación (1):

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{d}{dx}1 \Leftrightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{.........} \quad (2)$$

Ahora derivemos respecto de x a ambos miembros de la ecuación (2):

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x}{y}\right) \Leftrightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y - x\dfrac{dy}{dx}}{y^2} \quad \text{.............................} \quad (3)$$



Sustituyendo (2) en (3), tenemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{y - x(-\frac{x}{y})}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} = -\frac{\frac{x^2 + y^2}{y}}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}$$

18. Calcule aproximadamente el volumen de un cubo de 3,25 cm de lado.

Solución:

Por definición de diferencial, tenemos que

$$f(x + dx) \approx f(x) + f'(x).\ x$$

Consideraremos la función:

$f(x) = x^3$ y dado que deseamos calcular 3.25^3, tenemos que $x = 3$ y $dx = 0{,}25$.

Hallando la derivada de la función $f'(x) = D_x\,[x^3] = 3x^2$

Evaluando para $x = 3 \Rightarrow f'(3) = 3(3)^2 = 27$.

Y reemplazando en la definición de diferencial:

$f(3{,}25) \approx f(3) + f'(3)\ 0{,}25 \Rightarrow 27 + 27 \bullet 0{,}25 = 27 + 6{,}75 = 33{,}75\ \text{cm}^3$

Ejercicios propuestos

Calcule la derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^3 + 2$

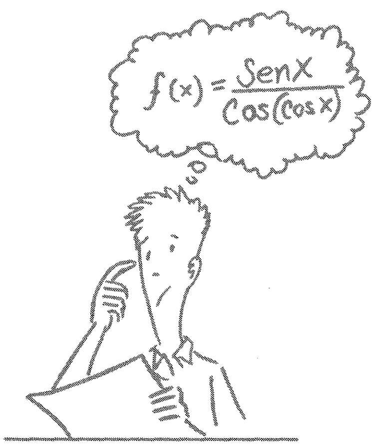
   R. $f'(x) = 3x^2$

2. $f(x) = \sqrt{x} + 20$

   R. $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x}$

3. $f(x) = x^3 - x^{-2} + 3$

   R. $f'(x) = 3x^2 + 2\dfrac{1}{x^3}$



4. $f(x) = (x^4 - x)\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$

   R. $f'(x) = 5x^4 + 9x^2 - 2x$

5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - x^3}{x^{4/3} + 1}}$

   R. $$\frac{(x^{4/3}+1)^{1/2}\left[(x^{4/3}+1)(2x-3x^2)-\frac{4}{3}x^{1/3}(x^2-x^3)\right]}{2(x^2-x^3)^{1/2}(x^{4/3}+1)^2}$$

6. $f(x) = sen(x^2 + x)cos(x - \sqrt{x})$

   R. $$(2x+1)\ cos(x^2+x)\ cos\left(x-\sqrt{x}\right)$$
   $$-\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ sen\left(x-\sqrt{x}\right)\ sen\left(x^2+x\right)$$

7. $f(x) = \dfrac{senx}{cos(cos\,x)}$

   R. $$\frac{cosx(cos(\cos x)) - sen^2 x sen((cosx)}{cos^2(cosx)}$$

8. $f(x) = ln(x^2 + 2x + 3)$

R. $\frac{1}{x^2+2x+3}(2x+2)$

9. $f(x) = sen(ln(x + 1) - log_2(x^3 + 5)$

R. $\frac{cos(ln(x+1))}{x+1} - \frac{3x^2}{1n^2(x^2+5)}$

10. $f(x) = e^{senx} + 2^{x^2}$

R. $f'(x) = e^{senx} cosx + 2^{x^2} ln2 \; . \; 2x$

11. $f(x) = e^{x^2+2x+5} + 5^{\cos x}$

R. $f'(x) = e^{x^2+2x+5}(2x+2) - 5^{cosx} ln5senx$

Calcule la derivada de y respecto de x:

12. $y^2 + 3xy + x^2 = 10$

R. $\frac{dx}{dx} = -\frac{(3y+2x)}{(2y+3x)}$

13. Halle la derivada de la función $y = xy + xy^2 + x + 25$ cuando $x = 0$.

R. $f' = (0) = 651$

14. Obtenga la primera y segunda derivada de $f(x) = cos(cos(x^2 + 1))$.

R. $f'(x) = -sen(cos(x^2+1)) \; . \; -sen(x^2+1) \; . \; 2x$

$$f''(x) = 4x^2 sen(cos(x^2+1)) + 2sen(x^2+1)sen(cos(x^2+1))$$
$$-4x^2 cos(cos(x^2+1)) \; . \; sen^2(x^2+1)$$

15. Obtenga la tercera derivada de la siguiente función:

$f(x) = ln(lnx^2)$ [Sugerencia: $y = ln(lnx^2) \;\Leftrightarrow\; ln2 + ln(lnx)$]

R. $\frac{-xln^2x - 2xlnx(1+lnx)^2}{(xlnx)^4}$

16. Calcule aproximadamente $\sqrt[3]{9,01}$.

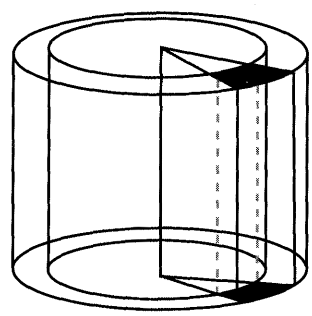
R. 2,081

17. Al calentar una placa cuadrada metálica de 15 cm de longitud, su lado aumenta 0,04 cm. ¿Cuánto aumentó aproximadamente su área?

R. 1,2 cm^2

18. La pared lateral de un depósito cilíndrico de radio 50 cm y altura 1 m debe revestirse con una capa de concreto de 3 cm de espesor. ¿Cuál es aproximadamente la cantidad de concreto que se requiere?

En este ejercicio es necesario que haga un esquema del cilindro 'visto desde arriba' (perspectiva horizontal).



R. V = 99 902,64 cm^3

19. Encuentre la función del costo marginal y el costo marginal para los valores indicados de q, si c representa el costo promedio por unidad, que es una función del número q de unidades producidas.

$c = 0{,}00002q^3 - 0{,}01q^2 + 6q - 7; \quad q = 500 \quad y \quad q = 100$
(El costo marginal es la derivada del costo)

R. $c'(q) = 0{,}00006q^2 - 0{,}02q + 6$
$c'(100) = 4{,}6$
$c'(500) = 11$

20. La función de costo total de una fábrica de medias viene dada según estudios por la siguiente función:

$$c = -10484{,}69 + 6{,}75q - 0{,}000328q^2,$$

donde q es la producción en docenas de pares y c es el costo total. Encuentre la función de costo marginal y evalúela cuando q es igual a 5000.

R. $c'(q) = 6{,}75 - 0{,}000764q$
2,93

21. La ecuación de la demanda para cierta mercancía es $p^2 + x - 12 = 0$. Encontrar las funciones del precio, del ingreso total y del ingreso marginal.

R. $p(x) = \sqrt{12-x}$

$r(x) = x\sqrt{12-x}$

$r'(x) = \dfrac{24-3x}{2\sqrt{12-x}}$

22. Si la ecuación de demanda total para un determinado producto es $3x + 4p = 12$.

a) Encontrar la función del precio.

b) Encontrar la función del ingreso total.

c) Hallar la función del ingreso marginal.

Verificar que la curva del ingreso marginal intercepte al eje x en el punto cuya abscisa es el valor de x para el cual el ingreso total es máximo, y que la curva de la demanda intercepte al eje de las x en el punto cuya abscisa es el doble de aquella.

R. a) $3-\dfrac{3}{4}x$

b) $3x-\dfrac{3x^2}{4}$

c) $3-\dfrac{3}{2}x$

23. Un fabricante encontró que con m empleados trabajando, el número de unidades producidas por día es q, donde $q = 10\sqrt{m^2+3600}-600$.

La ecuación de demanda para el producto es: $9q + p^2 - 7200 = 0$.

Donde p es el precio es el precio de venta cuando la demanda para el producto es q unidades por día.

a) Determine el producto de ingreso marginal del fabricante cuando $m = 80$.

b) Encuentre la razón de cambio relativa del ingreso respecto del número de empleados cuando $m = 80$.

c) Suponga que le costaría al fabricante $300 más por día contratar un empleado adicional. ¿Aconsejaría Ud. al fabricante contratar a este empleado adicional? ¿Por qué?

R. a) 240

b) 0,01

c) No, porque $\dfrac{dr}{dm} < 300$, cuando $m = 80$.

24. El número de dólares del costo total de la manufactura de x relojes en cierta fabrica está dado por $c(x) = 1500 + 30x + 20/x$. Encontrar:

a) La función del costo marginal.

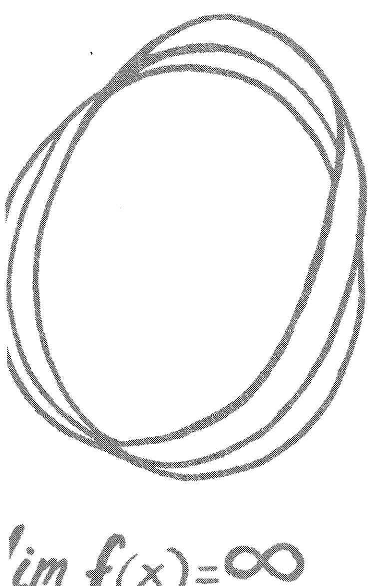
b) El costo marginal cuando $x = 40$.

c) El costo marginal del cuadragésimo primer reloj.

R. a) $30 - 20/x^2$

b) \$29,99

c) \$29,95



$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

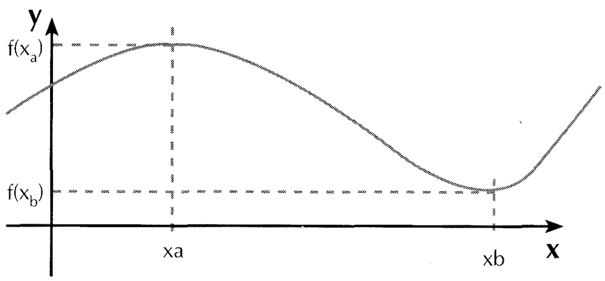
Capítulo 15
APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

15.1 Monotonía de funciones

En este caso, trabajaremos con la primera derivada. De acuerdo con lo que vimos en el capítulo de funciones, la monotonía de una función describe su crecimiento o decrecimiento. Cuando una función cambia su estado de monotonía, se dice que ha llegado a un extremo relativo.

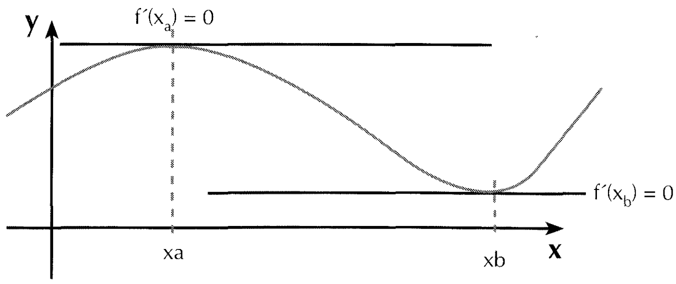
La derivada es la tangente de la recta. Si la recta es horizontal, su tangente será cero.

Cuando una función es creciente en un cierto intervalo y luego pasa a ser decreciente a partir de un punto, se dice que ese punto es un máximo relativo. Asimismo, cuando una función es decreciente en un cierto intervalo y luego pasa a ser creciente a partir de un punto, se dice que ese punto es un mínimo relativo.



En el gráfico, el punto $(x_a; f(x_a))$ es un máximo relativo y el punto $(x_b; f(x_b))$ es un mínimo relativo.

En una función creciente, la pendiente de la recta tangente a cada uno de sus puntos es positiva; en cambio, cuando la función es decreciente, la pendiente de la recta tangente a cada uno de sus puntos es negativa. En el caso de los extremos relativos, la pendiente de la recta tangente es cero. Esto quiere decir que en los extremos relativos se cumple que $f'(x) = 0$



Por lo tanto, si queremos hallar los extremos relativos de la gráfica de una función, debemos encontrar los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$.

Ejemplos:

Halle los extremos de las siguientes funciones:

1. $f(x) = x^2 - 4x - 1$

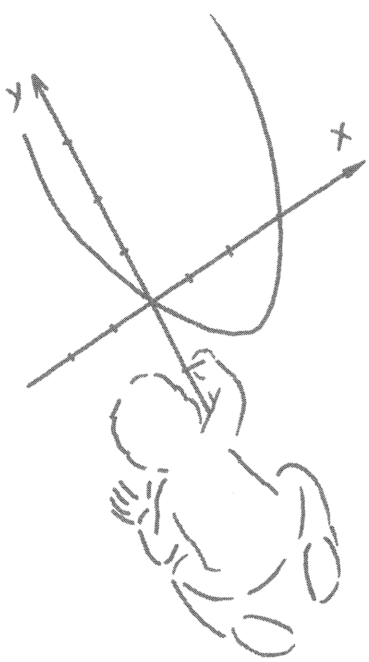
Solución:

Dada la función $f(x) = x^2 - 4x - 1$

$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4x - 1$ no hay restricciones para el dominio.

$f'(x) = 2x - 4 \therefore f'(x)$ existe para todo $x \in R$.

Además, $f'(x) = 0$ cuando $x = 2$; por tanto, 2 es un punto crítico de la función. Aplicando el criterio de la primera derivada, se resumen los resultados en la siguiente tabla:



x	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusión
$x < 2$		-	f decrece.
$x = 2$	-5	0	f tiene un mínimo relativo.
$x > 2$		+	f crece.

Hallaremos las intersecciones con el eje x mediante la solución general cuadrática.

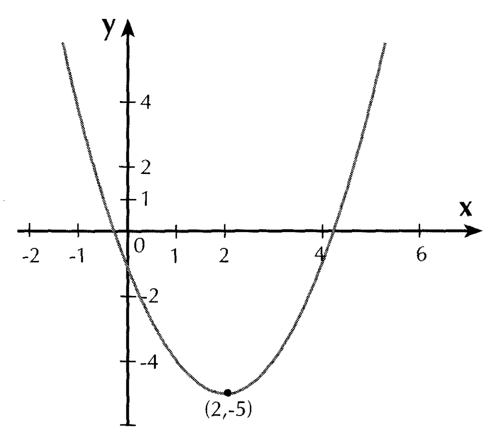
$$x^2 - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

La gráfica de f corta al eje y en -1.

$f(2) = -5$, por lo que vértice está en (2;-5).

Además, f decrece en <∞;2] y crece en [2; ∞>.



2. $f(x) = x^3 - x^2 - x$

Solución:

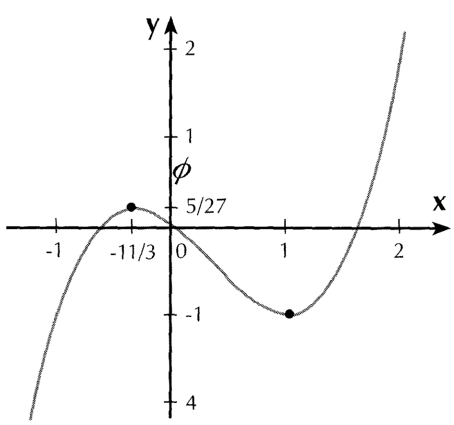
Dada la función $f(x) = x^3 - x^2 - x$, no hay restricciones para el dominio.

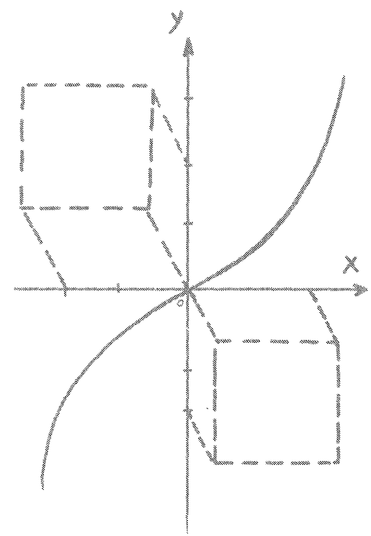
$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1)$

Luego, $f'(x)$ existe para todo $x \in R$;
$f'(x) = 0$ cuando $x = -1/3$ o $x = 1$; por tanto, son puntos críticos.

Aplicando el criterio de la primera derivada, se resumen resultados en la siguiente tabla:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**Conclusión**
$x < -1/3$		+	f crece.
$x = -1/3$	5/27	0	f tiene un mínimo relativo.
$-1/3 < x < 1$		-	f decrece.
$x = 1$	-1	0	f tiene un mínimo relativo.
$x > 1$		+	f crece.





3. $$f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Solución:

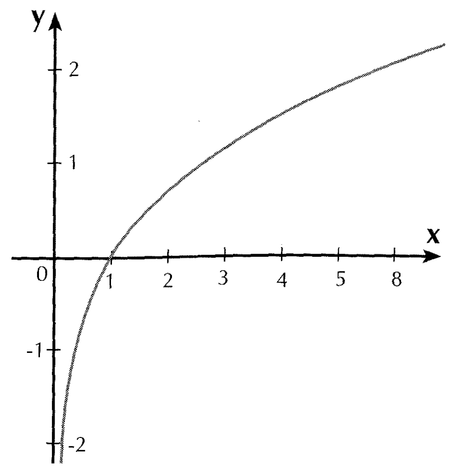
Dada la función

$f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}; \forall x \in R^+$, son los elementos que pertenecen al dominio.

$$f'(x) = \frac{1 + x}{2x^{3/2}}$$

Luego, $f'(x)$ existe para todo $x > 0$ que satisfaga la condición del dominio.

Haciendo que $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$, ya que $x = -1$ no pertenece al dominio de la función, la función no tiene extremos relativos.



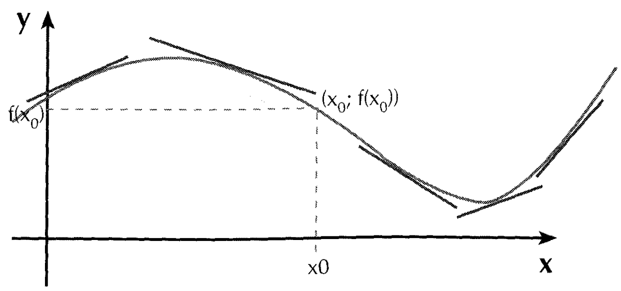
$f'(x) = \dfrac{1+x}{2x^{3/2}} > 0; \forall x \in Dom\ f = R^+; f$ es creciente en todo su dominio.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}} = -\infty$; por tanto, $x = 0$ es asíntota vertical de $f(x)$.

15.2 Concavidad

Cuando una curva pasa de ser creciente a ser decreciente, no necesariamente cambia su concavidad.

En este caso, trabajaremos con la segunda derivada. De acuerdo con lo que vimos en el capítulo de funciones, la concavidad de la gráfica de una función para un determinado intervalo indica si las tangentes a la curva van sobre ella o debajo de ella. En el primer caso, se dice que la función es cóncava hacia abajo; en el segundo, se dice que es cóncava hacia arriba. Al punto en el que la función cambia su concavidad, se le llama punto de inflexión.



En este caso, el punto $(x_0; f(x_0))$ es un punto de inflexión de la curva.

En el punto de inflexión, la segunda derivada de la función es cero. Así, tenemos:

$$f''(x_0) = 0.$$

Ejemplos:

1. Halle los puntos de inflexión y la concavidad de la función:
$f(x) = x^3 + 9x$

Solución:

Dada la función $f(x) = x^3 + 9x$, no hay restricciones para el dominio.

Además, $\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 9$

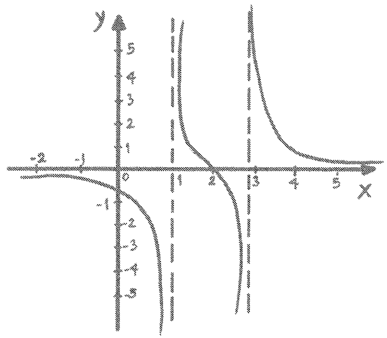
$\Rightarrow f''(x) = 6x$

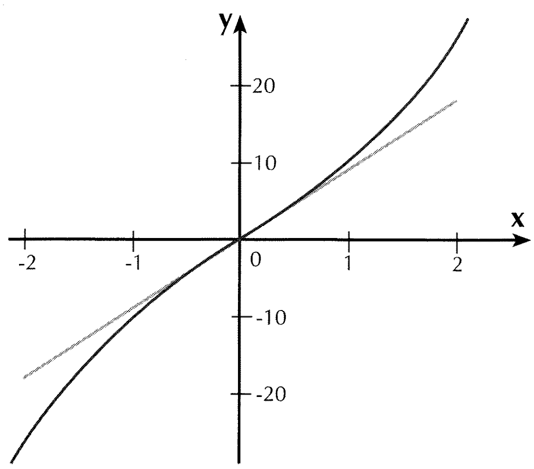
Por tanto, $f''(x)$: existe $\forall\ x \in R$

$f''(x) = 6x = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Los datos se resumen en la siguiente tabla:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$x < 0$			-	La gráfica de f es cóncava hacia abajo.
$x = 0$	0	9	0	f tiene un punto de inflexión.
$x > 0$			+	La gráfica de f es cóncava hacia arriba.





2. $f(x) = x^4 - 8x^3$

Solución:

Dada la función $f(x) = x^4 - 8x^3$,

$\Rightarrow f'(x) = 4x^2 - 24x^2$

$\Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 48x$

Recuerde la solución de ecuaciones cuadráticas:

$(x + a)(x + b) = 0$

$\Rightarrow x = -a$

$x = -b$

Por tanto, $f''(x)$: existe $\forall\, x \in R$.

$f''(x) = 12x^2 - 48x$

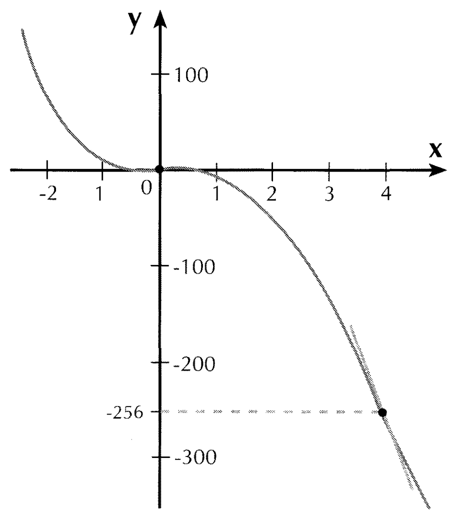
$f''(x) = 12x(x - 4) = 0$

Hallando los posibles puntos de inflexión: $f''(x) = 12x(x - 4) = 0$.

Por tanto, $x = 0$ o $x = 4$ son abscisas posibles de puntos de inflexión.

Los datos se resumen en la siguiente tabla:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$x < 0$			+	La gráfica de f es cóncava hacia arriba.
$x = 0$	0	0	0	f tiene un punto de inflexión.
$x < x > 4$			-	La gráfica de f es cóncava hacia abajo.
$x = 4$	-256	-128	0	f tiene un punto de inflexión.
$x > 4$			+	La gráfica de f es cóncava hacia arriba.



3. $f(x) = (x + 2)^{1/3}$

Solución:

Dada la función $f(x) = (x + 2)^{1/3}$,

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3(x+2)^{2/3}} \qquad Dom\ f' = R - \{-2\}$$

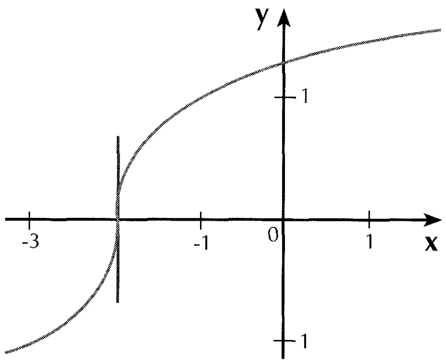
$$\Rightarrow f''(x) = -\frac{2}{9(x+2)^{5/3}} \qquad Dom\ f'' = R - \{-2\}$$

Por tanto, $f'(x)$ y $f''(x)$ nunca serán cero. $f'(x)$ y $f''(x)$: existe para valores diferentes de -2.

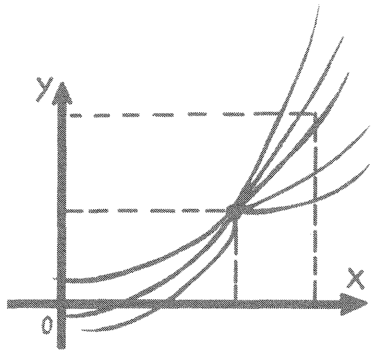
⇒ $x = -2$ es abscisa posible de punto de inflexión.

En la tabla que sigue se resumen los resultados obtenidos:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusión
$x < -2$			+	Creciente, cóncava hacia arriba.
$x = -2$	0	no existe	no existe	f tiene un punto de inflexión.
$x > -2$			+	Creciente, cóncava hacia abajo.



15.3 Trazado de curvas



Para trazar la gráfica de una función, debemos identificar lo siguiente:

a. Si la curva tiene puntos de corte con los ejes.

Para este punto, debemos igualar x a cero y calcular el valor de y; y luego, igualar y a cero y calcular el valor de x.

b. Si la curva tiene extremos relativos.

Para este punto, debemos igualar la primera derivada de la función a cero y hallar los valores de x. Sabremos si es un máximo o un mínimo al reemplazar en la función valores cercanos al obtenido para x.

c. Si la curva tiene puntos de inflexión.

Para este punto, debemos igualar la segunda derivada de la función a cero y hallar los valores de x. Sabremos en qué sentido se da el cambio de concavidad al reemplazar en la función valores cercanos al obtenido para x.

d. Si la curva es continua en todo su dominio.

Para este punto, debemos aplicar la teoría de los límites laterales en los puntos donde la gráfica pueda presentar saltos.

e. Si la curva presenta asíntotas.

Para este punto, debemos calcular los límites de la función, siempre que pertenezca a su dominio, cuando $x \to \infty$ y cuando $x \to -\infty$.

Ejemplos

1. Trace la gráfica de la función $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

Solución:

Dada la función $y = \dfrac{2x}{x^2 - 1}$; $Dom\,f$ = R - {-11}

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-2 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} \Leftrightarrow \frac{-2(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2};\ Dom\,f = \text{R - \{-11\}}$$

Si $f'(x) = 0$, no existe valor que satisfaga tal condición.

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{4x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3};\ Dom\,f = \text{R - \{-11\}}$$

Si $f''(x) = 0$; entonces $x = 0$ es el valor que satisface tal condición.

Puntos de corte:

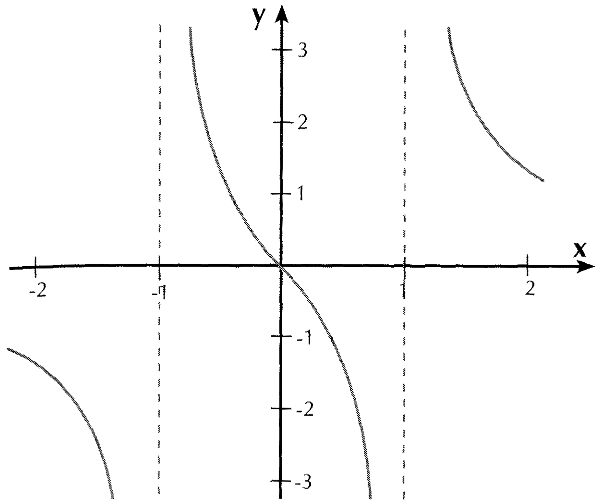
a) Con el eje de las ordenadas (X): si $x = 0$, entonces $y = 0$; luego, pasa por (0;0).

b) Con el eje de abscisas (Y): si $y = 0$; luego, $2x = 0$, es decir, $x = 0$.

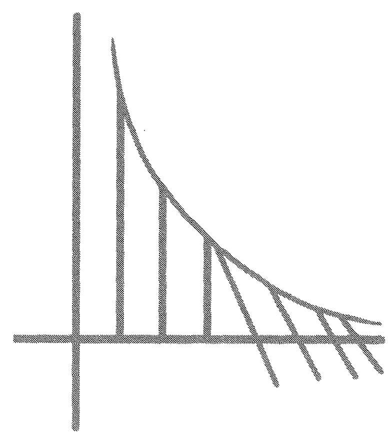
Observe que se origina de nuevo el punto (0; 0). Esto quiere decir que la gráfica de f sólo corta a los ejes en el origen de coordenadas.

Resumimos las conclusiones de los datos obtenidos en la siguiente tabla:

x	$f(.)$	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión**
$x < -1$			+	Decreciente y cóncava hacia abajo.
$x = -1$	0	0	0	Asíntota vertical.
$-1 < x > 0$			-	Decreciente y cóncava hacia arriba.
$x = 0$	-256	-128	0	Punto de inflexión.
$0 < x > 1$	-	-	-	Decreciente y cóncava hacia abajo.
$x = 1$	0	0	0	Asíntota vertical.
$x > 1$	+	-	+	Decreciente y cóncava hacia arriba.



Ejercicios resueltos



1. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2x^2 + 3$ que sea paralela a la recta $8x - y + = 0$

Solución:

Sea la función $y = 2x^2 + 3$ .... (1)

m: pendiente de la recta tangente a la curva.

$m = y = 4x$ .... (2)

Además, $8x - y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = 8x + 3$ .... (3)

Si m_1 es la pendiente de la recta definida por (3), entonces

$m_1 = 8$ .... (4)

Ahora, como las rectas referidas son paralelas entre sí, tienen iguales pendientes. Por lo que, igualando (2) y (4), tenemos:

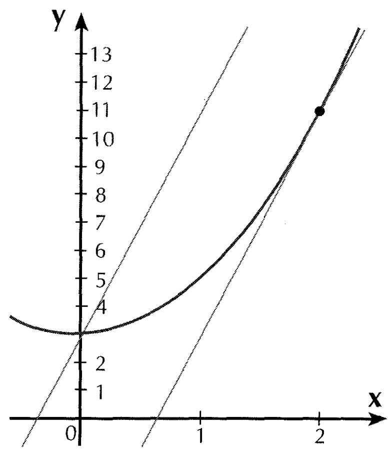
$4x = 8 \Rightarrow x = 2$ .... (5)

Para obtener la ordenada del punto de tangencia, sustituimos (5) en (1):

$y = 2(2)^2 + 3 = 11$; y por la forma pendiente del punto de la recta, obtenemos:

$y = 8(x - 2) + 1 \Rightarrow y = 8x - 16 + 1$

$\Rightarrow 8x - y - 5 = 0$, que es la ecuación buscada.



Tome en cuenta que la velocidad se define como la derivada respecto del tiempo de la distancia:

$\boxed{V = D_t S}$

2. Un jugador golpea una bola de billar haciéndola mover en línea recta. Si s centímetros es la distancia de la bola desde su posición inicial a los t segundos, entonces $s = 100t^2 + 100t$. Si la bola pega en una banda que se encuentra a 39 cm de su posición original, ¿a qué velocidad pega en la banda?

Solución:

Sea la ecuación de la posición $s = 100t^2 + 100t$ .... (1)

Si, además, v es la velocidad instantánea de la bola en cualquier instante t, entonces

$v = D_t s = 200t + 100$ .... (2)

$s = 39$ .... (3)

Sustituyendo (3) en (1):

$100t^2 + 100t = 39 \Leftrightarrow 100t^2 + 100t - 39 = 0 \Leftrightarrow (10t - 3)(10t + 13) = 0$

De las soluciones, tomaremos la que tenga valor positivo porque el tiempo siempre es positivo:

$10t - 3 = \Rightarrow t \approx 0{,}3$ .... (4)

Sustituyendo (4) en (2):

$v = 200(0{,}3) + 100 = 160$

Por lo tanto, la bola pega con una velocidad de 160 cm/s en la banda.

3. Halle los extremos relativos de la función $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$.

Solución:

Dada la función $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$; $Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$

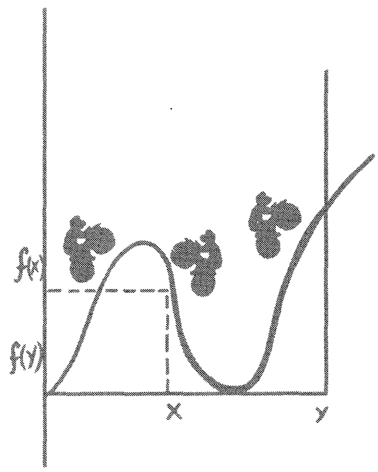
$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^3 - 2}{x^3}$

Por tanto, $f'(x)$ no existe para $x = 0$. Además, este valor no pertenece al dominio. Por tanto, 0 no es punto crítico de f.

$f'(x) = 0$ cuando $x = \sqrt[3]{2}$: punto crítico de f.

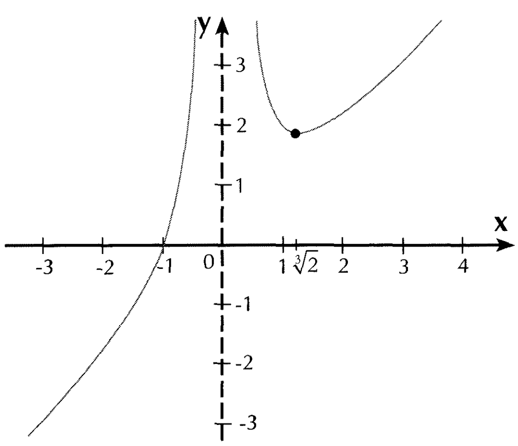
Además, $\lim_{x \to 0^-} = \infty = \lim_{x \to 0^+}$, por lo que cero es una asíntota vertical.

Aplicando el criterio de la primera derivada, se resumen los resultados en la siguiente tabla:



x	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusión
$x < 0$		+	f crece.
$x = 0$	No existe.	No existe.	
$0 < x < \sqrt[3]{2}$		-	f decrece.
$x = \sqrt[3]{2}$	1,9	0	f tiene un mínimo relativo.
$x > \sqrt[3]{2}$		+	f crece.

La gráfica de la función es la que se muestra a continuación:



4. Halle los extremos relativos de la siguiente función:

$$f(x) = (1 - x)^2 (1 + x)^3$$

Solución:

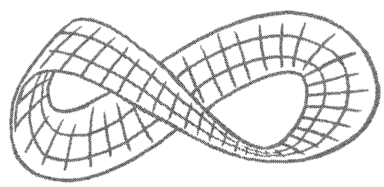
Dada la función $f(x) = (1 - x)^2(1 + x)^3$; $dom\, f = \mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(x) = (x + 1)^2(x - 1)(5x - 1)$

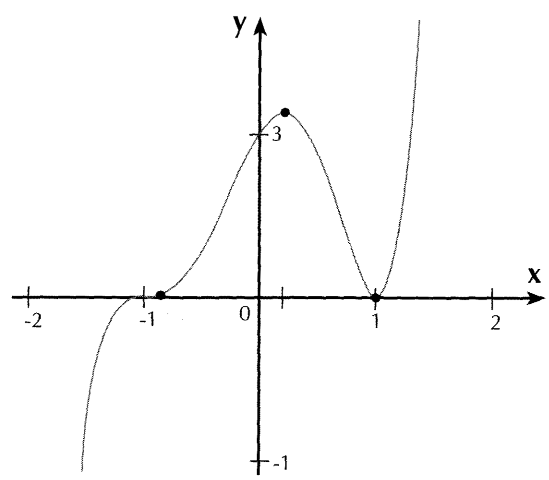
Por tanto, $f'(x)$ siempre existe.

Además, $f'(x) = 0$ cuando $x = \left\{-1, \frac{1}{5}; 1\right\}$. Estos últimos serán los puntos críticos de la función.

Aplicando el criterio de la primera derivada, se resumen los resultados en la siguiente tabla:



x	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusión
$x < -1$		+	f crece.
$x = -1$	0	0	No hay un extremo relativo.
$-1 < x < 1/5$		+	f crece.
$x = 1/5$	1,1	0	f tiene un mínimo relativo.
$1/5 < x < 1$		-	f decrece.
$x = 1$	0	0	f tiene un mínimo relativo.
$x > 1$		+	f crece.



5. Halle los puntos de inflexión de la siguiente función: $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$.

Solución:

La función en estudio es $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + 1$.

$\Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x$ $\quad Dom\, f = \mathbb{R}$

$\Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 18x + 6$ $\quad Dom\, f = \mathbb{R}$

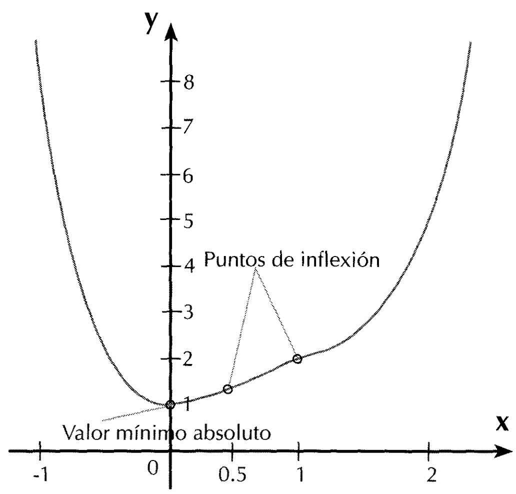
Además, $f(0) = 1$, por lo que la gráfica corta al eje y en 1.

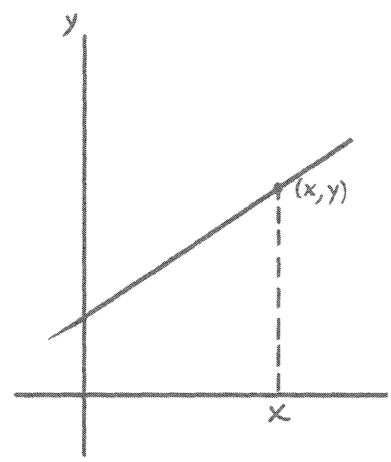
Igualando $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x = 0$, resulta que $x = 0$.

Luego, igualando $f''(x) = 12x^2 - 18x + 6 = 0$, resulta que $x = 1/2$ o $x = 1$, los cuales son los puntos de inflexión.

Se resume la información en el cuadro siguiente:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión**
$x = 0$	1	0		Mínimo.
$x < 1/2$		+	+	Cóncava hacia arriba.
$x = 1/2$	1,438		0	Punto de inflexión.
$1/2 < x < 1$		+	-	Cóncava hacia abajo.
$x = 1$	2	+	0	Punto de inflexión.
$x > 1$			+	Cóncava hacia arriba.





6. Halle los puntos de inflexión de la siguiente función:

$$f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

Solución:

Dada la función a analizar: $f(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2$

$\Rightarrow$ $f'(x) = 4x^3 - x^2 + 3x$; $Dom\, f = R$

$\Rightarrow$ $f''(x) = 12x^2 - 2x - 3$; $Dom\, f = R$

Para hallar los puntos críticos, hacemos:
$f'(x) = 4x^3 - x^2 + 3x \quad \Rightarrow \quad x(x - 1)(4x + 3) = 0$

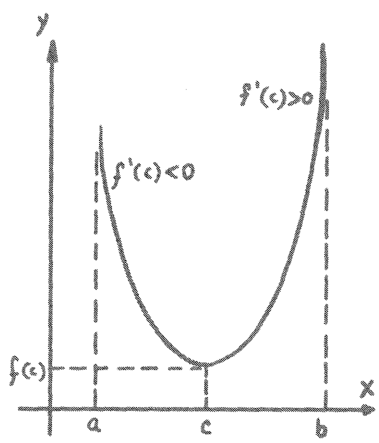
Por lo que los puntos críticos son 0,1 y -3/4.

Vamos a aplicar el criterio de la segunda derivada para determinar si en estos puntos críticos f tiene un máximo o un mínimo relativo:

$f''(-3/4) = 12(-3/4)^2 - 2(-3/4) - 3 = 21/4 \Rightarrow$ es positivo. f tiene un mínimo relativo.

$f''(0) = 12(0)^2 - 2(0) - 3 = -3 \Rightarrow$ es negativo. f tiene un máximo relativo.

$f''(0) = 12(1)^2 - 2(1) - 3 = 7 \Rightarrow$ es positivo. f tiene un mínimo relativo.



Los valores de la función en -3/4, 0 y 1 son:

$f(-3/4) = -99/256$

$f(0) = 0$

$f(1) = -5/6$

Encontrando el punto de inflexión de la función, tenemos:

$f''(x) = 12x^2 - 2x - 3 = 0$

Resolviendo la ecuación, tenemos:

$12x^2 - 2x - 3 = 0$, por lo que $x = \dfrac{1-\sqrt{37}}{12} \approx -0{,}4$ o $x = \dfrac{1+\sqrt{37}}{12} \approx 0{,}6$

Hallaremos ahora con ello los tipos de concavidad a lo largo del dominio.

Sabemos que $f''(x) = (x - \dfrac{1-\sqrt{37}}{12})(x + \dfrac{1+\sqrt{37}}{12}) = 0$

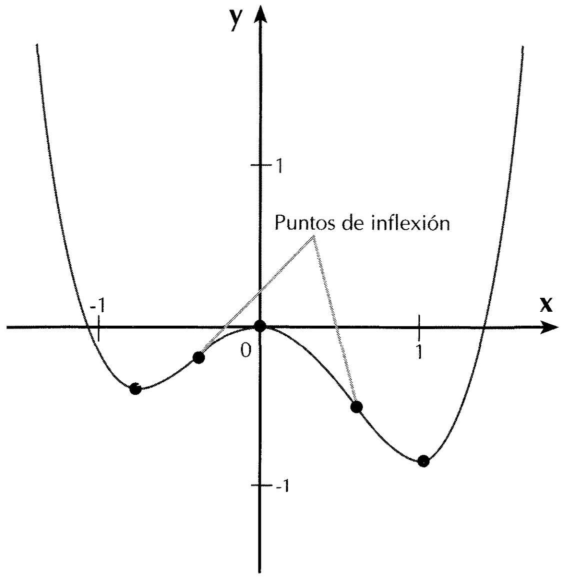
La gráfica será cóncava hacia arriba si $f''(x) > 0$.

$$\Rightarrow x < \frac{1-\sqrt{37}}{12} \text{ o } x > \frac{1+\sqrt{37}}{12}$$

La gráfica será cóncava hacia abajo si $f''(x) < 0$.

$$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{37}}{12} < x < \frac{1+\sqrt{37}}{12}$$

La gráfica se aproxima a



7. Grafique la función $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$

Solución:

Sea la función en análisis $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$; $Dom f = R$

$\Rightarrow \; f'(x) = 6x^2 - 6 \quad \Leftrightarrow \quad 6(x^2 - 1)$ $\qquad Dom f' = R$

Además, si $f'(x) = 0$; $x = 1$ o $x = -1$

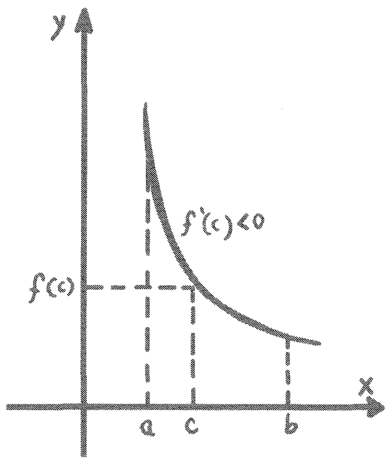
$\Rightarrow f''(x) = 12x$ $\qquad Dom f'' = R$

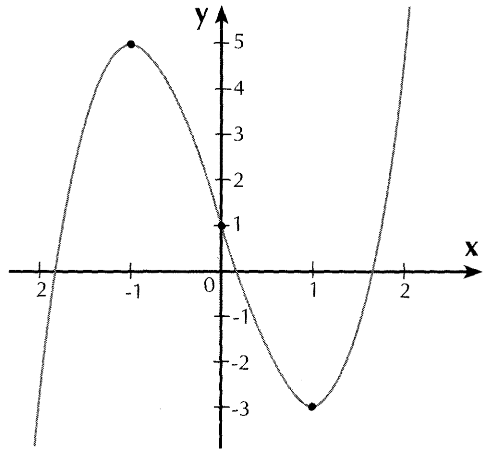
Además, si $f''(x) = 0$; $x = 0$

Por lo que es un punto de inflexión.

Resumimos las conclusiones de los datos obtenidos en la siguiente tabla:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	**Conclusión**
$x < -1$		+	-	f crece. La gráfica es cóncava hacia abajo.
$x = -1$	5	0	-	f con valor máximo relativo. Concavidad hacia abajo.
$-1 < x < 0$		-	-	f decrece. La gráfica es cóncava hacia abajo.
$x = 0$	1	-6	0	f decrece. La gráfica tiene un punto de inflexión.
$0 < x > 1$		-	+	f decrece. La gráfica es cóncava hacia arriba.
$x = 1$	-3	-	+	f con valor mínimo relativo. Concavidad hacia arriba.
$x > 1$	+	-	+	f crece. La gráfica es cóncava hacia arriba.





8. Considere una empresa que opera en el mercado bajo la siguiente función de costos: $CT(x) = 0{,}1x^2 + 10x + 50$ y con un precio de venta dado por el mercado de \$20 por unidad. Dada esta información, conteste las siguientes preguntas:

a) Para maximizar las utilidades, ¿cuántas unidades debe producir la empresa?

b) ¿A cuánto ascienden estas utilidades?

Para maximizar las utilidades, debemos hacer que la función utilidad alcance un máximo.

$U_{(x)} = PV_{(x)} - PC_{(x)}$

La utilidad es la diferencia entre el precio de venta y el precio de costo.

Solución:

Sean

x: número de unidades recibidas .... (1)

$CT(x) = 0{,}1x^2 + 10x + 50$: costos de producción............ (2)

$20x$: dinero recibido por la venta 20 unidades .... (3)

$U(x)$: utilidades en función de x... (4)

De tal manera que

$U(x) = 20x - (0{,}1x^2 + 10x + 50) \Leftrightarrow U(x) = -0{,}1x^2 + 10x - 50$ (5)

Por tanto, para maximizar dicha función, haremos uso de su derivada:

$U'(x) = -0{,}2x + 10$ .... (6)

E igualándola a cero, tendremos:

$U'(x) = 0{,}2x + 10 = 0 \;\Rightarrow\; x = 50$... (7)

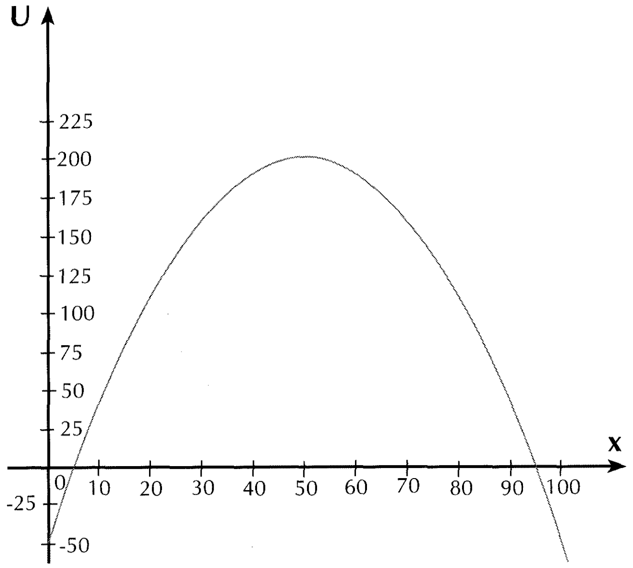
a) La empresa recibe el máximo de utilidades si produce exactamente 50 unidades.

b) Sustituyendo (7) en (5):

$$U(x) = -0{,}1(x)^2 + 10(x) - 50 \text{ y } x = 50 \text{ y } x = 50$$

$$U(50) = -0{,}1(50)^2 + 10(50) - 50 = 200$$

Las utilidades máximas ascienden a \$200.



Recuerde:

Si $L_1 \perp L_2$,

entonces $m_1 \cdot m_2 = 0$

9. Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva $y = 2 - \frac{1}{3}x^2$ que sea perpendicular a $x - y = 0$.

Solución:

Sea la función en estudio: $y = 2 - \frac{1}{3}x^2$ .... (a)

Sean:

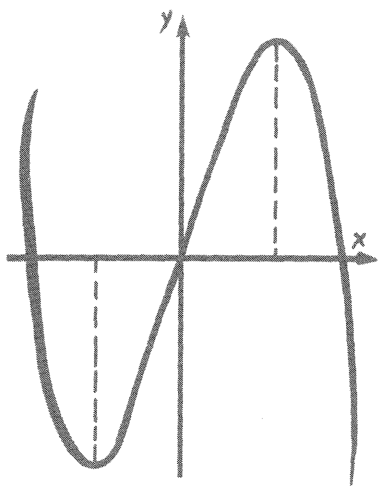
m: la pendiente de la recta tangente a la curva, entonces tenemos:

$m = y' = -\frac{2}{3}x$ .... (1)

$x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$ .... (2)

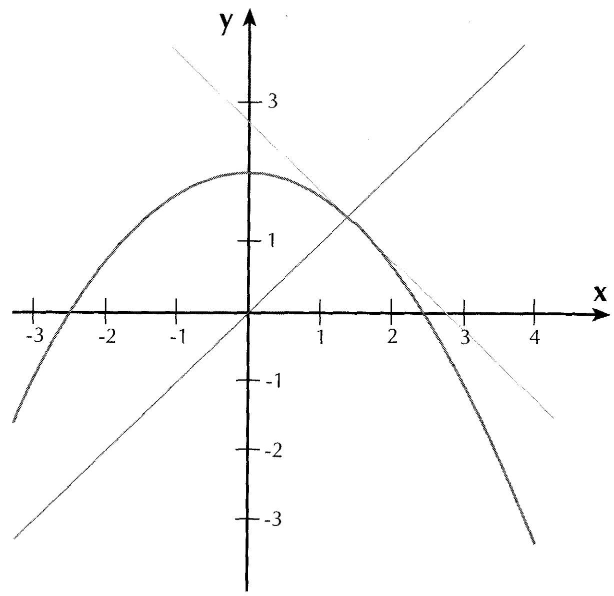
Si m_1 es la pendiente de la recta definida por (2), entonces

$m_1 = 1$ .... (3)



Ahora, como las rectas referidas son perpendiculares entre sí, el producto de sus pendientes es igual a -1, esto es:

$$m \cdot m_1 = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{m_1} \quad \text{.......................................} \quad (4)$$



Sustituyendo (3) en (4), se obtiene $m = -\frac{1}{1} \Leftrightarrow m = -1$ .... (5)

Igualando (5) y (1), se obtiene $-\frac{2}{3}x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ .... (6)

Para obtener la ordenada del punto de tangencia, sustituimos en (a):

$$y = 2 - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 2 - \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4} = 2 - \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \frac{5}{4} \quad \text{.........................} \quad (7)$$

De (5), (6) y (7) y la forma punto-pendiente para la ecuación de una recta, se tiene:

$$y = -1\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{5}{4},$$

$\Rightarrow y = -x + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} = -x + \frac{11}{4}$; por lo tanto, la ecuación será

$4x + 4y - 1 = 0$:

Ejercicios propuestos

Halle los extremos relativos de las funciones siguientes:

1. $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$

   R. $(-1;0);(1/3;1,\widehat{185})$

2. $f(x) = 2x^2\sqrt{x^2-1}$

   R. (0; 0)

3. $f(x) = (x^2 - 4)^{5/3}$

   R. (-2; 0); (2; 0)

Halle los puntos de inflexión de las funciones dadas:

4. $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 18x$

   R. (0,25; 4,63)

5. $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + 6x + 1$

   R. $(0,\widehat{3};3,44)$

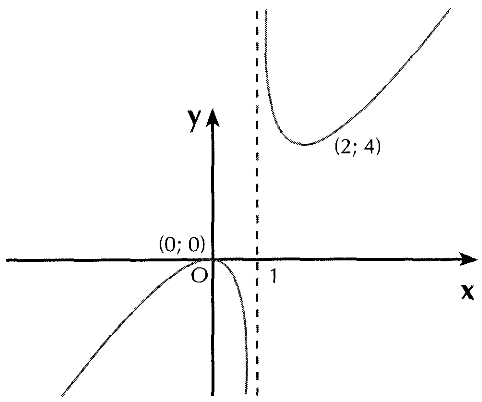
6. $f(x) = x^4 - x^3 - x^2$

   R. (0,73; -0,64)

   (-0,23; -0,04)

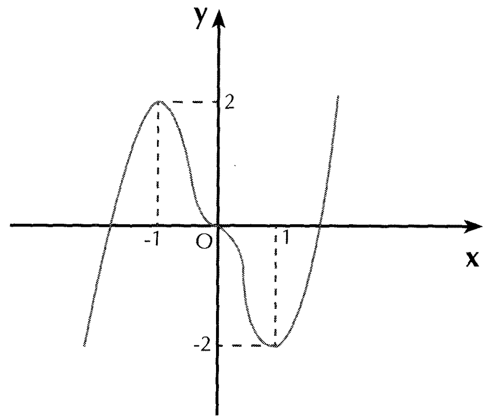
7. Represente gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

   R.



8. Represente gráficamente la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

R.



9. Determine una ecuación para cada una de las rectas normales a la curva $y = x^3 - 4x$ y las paralelas a la recta $x + 8y - 8 = 0$.

R. $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}$; $\quad y = -\frac{1}{8}x - \frac{1}{4}$

10. Si una piedra es lanzada desde el piso hacia arriba en forma vertical con una velocidad inicial de 10 m/s, entonces $s = -5t^2 + 10t$, donde s es la distancia de la piedra desde el punto de partida a los t segundos, y el sentido positivo es hacia arriba. Halle:

a. La velocidad media de la piedra durante el intervalo de tiempo $3/4 \leq t \leq 5/4$.

R. 20 m/s

b. La velocidad instantánea de la piedra a los 3/4 segundos y a los 5/4 segundos.

R. $2{,}5\frac{m}{s}$; $-2{,}5\frac{m}{s}$

c. ¿Cuántos segundos tardará en llegar al punto más alejado del suelo?

R. 1 s

d. ¿Cuál es la altura máxima a la que sube?

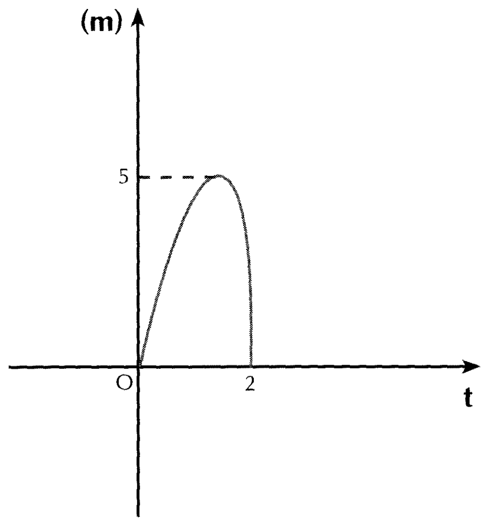
R. 5 m

e. ¿Cuántos segundos tardará en caer al suelo?

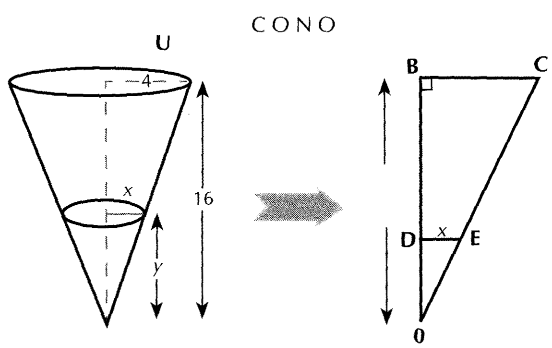
R. 2 s

f. Muestre la variación del desplazamiento con una figura.

R.



11. A un tanque que tiene la forma de un cono circular recto invertido de 4 m de radio y 16 m de altura entra agua a una razón de 50 cm^3/seg. ¿A qué velocidad está subiendo el nivel del agua cuando este se encuentra a 4 m de altura? ¿A qué velocidad está cambiando el radio en ese mismo instante?



Debe emplear la semejanza de triángulos o algunas relaciones geométricas en razones de cambio relacionadas.

R. $50/\pi$ m/s; $\frac{50}{4\pi}$ m/s

12. Demuestre que la gráfica de la ecuación de demanda $p = \frac{100}{q+2}$ es decreciente y cóncava hacia arriba para $q > 0$.

13. Al analizar un modelo del comportamiento de las compras, un grupo de economistas concluyó que el modelo respondía de la siguiente manera: $y = \frac{x}{a+bx}$, donde a y b son positivos. Estos economistas afirmaban que $y = \frac{1}{b}$ es una asíntota. Verifíquelo y analice también la gráfica.

14. Una caja sin tapa va a fabricarse cortando cuadrados iguales de ca esquina de una lámina cuadrada de 12 pulgadas de lado, dobland luego hacia arriba los lados. Encuentre la longitud del lado d cuadrado que debe recortarse para que el volumen de la caja sea máximo, y hallar dicho volumen.

R. 6 plg; 128 plg^3

15. La empresa D&R HERMANOS está considerando ofrecer un seminario sobre asignación de recursos a directivos de la compañía M&MF FILÓSOFOS. Para hacer el ofrecimiento económico factible, D&R HERMANOS considera que por lo menos 30 personas deben inscribirse y cubrir un costo de $50 cada una. Además, D&R HERMANOS acepta reducir la cuota en $ 1,25 por cada persona adicional a las primeras 30. ¿Cuánta gente debe inscribirse para que el ingreso de D&R HERMANOS sea máximo? Suponga que el número máximo de asistentes se limita a 40 personas.

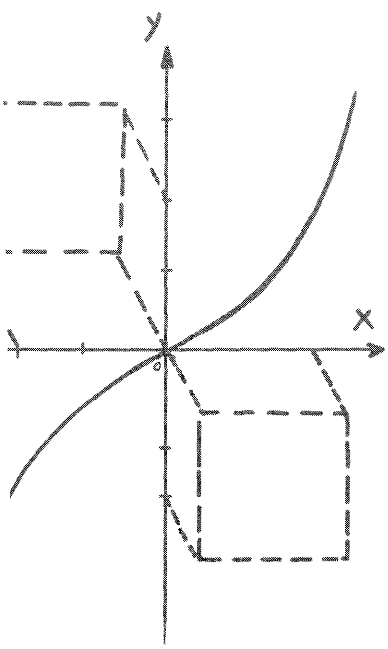
R. 35

16. Una empresa de televisión por cable tiene 4 800 suscriptores que pagan cada uno $18 mensuales, y puede conseguir 150 suscriptores más por cada reducción de $0,50 en la renta mensual. ¿Cuál será la renta que maximice el ingreso y cuál será este ingreso?

R. $17; $86 700.

17. Una lata cilíndrica sin tapa debe tener un volumen K.

Demuestre que si se usa la cantidad mínima de material, entonces el radio y la altura serán iguales a $r = h = \sqrt[3]{K / \pi}$



UNIDAD VI

Cálculo Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Capítulo 16
LA INTEGRAL

Podemos definir a la integral de dos maneras, que responden, a su vez, a los dos tipos de problemas que nos ayuda a solucionar. Por un lado, es una operación inversa a la derivada; por el otro, es una operación que nos sirve para hacer sumas cuyo número de elementos es infinito.

16.1 La integral indefinida. Primer teorema fundamental del cálculo

16.1.1 Definición

Si tenemos la derivada de una función dada, la integral nos sirve para encontrar dicha función. Si $F'(x) = f(x)$, entonces $F(x)$ es la primitiva de la función $f(x)$, es decir, la función original cuya derivada es $f(x)$. En ese sentido, la integral es la operación inversa a la derivada. Por ello, algunos autores la llaman antiderivada.

Muchas funciones pueden tener la misma derivada; por eso, cuando queremos hallar la primitiva de una función, aplicamos una integral indefinida que nos dará una familia de funciones posibles.

Si $F'(x) = f(x)$, entonces $\int f(x)dx = F(x) + C$, donde C es una constante que puede adoptar cualquier valor. Ya que el valor de C no está definido, decimos que se trata de una integral indefinida.

La integral es:

- La operación inversa de la derivada.
- El límite de una sumatoria.

16.1.2 Cálculo de la primitiva de una función

Algunas fórmulas para calcular las integrales de funciones conocidas son las siguientes:

a. **Integrales de funciones polinómicas:**

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Caso especial: $\int x^{-1} dx = ln\, x + C$

2. $\int (F(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

b. Integrales de funciones exponenciales:

$\int e^x dx = e^x + C$

Integrales de funciones trigonométricas:

$\int sen(x) dx = -cos(x) + C$

$\int cos(x) dx = sen(x) + C$

Ejemplos:

Calcule las funciones primitivas o antiderivadas de

1. $\int x^3 dx$
2. $\int (x^4 + 2x + 5) dx$
3. $\int cosx dx$

Solución:

1. Buscaremos una función cuya derivada sea x^3:

   $\int x^3 dx \Rightarrow \frac{x^4}{4} + c$, donde c es una constante de integración.

   Se cumple que $D_X[\frac{x^4}{4} + c] = x^3$

2. Buscaremos una función cuya derivada sea $(x^4 + 2x + 5)$:

   $$\int (x^4 + 2x + 5)dx \Rightarrow \frac{x^5}{5} + \frac{2x^2}{2} + \frac{5x}{1} + c = \frac{x^5}{5} + x^2 + \frac{5x}{2} + c$$

   donde c es una constante de integración.

   Se cumple que $D_X[\frac{x^5}{5} + x^2 + \frac{5x}{2} + c] = x^4 + 2x + 5$

3. Buscaremos una función cuya derivada sea $cos\ x$:

   $\int \cos x dx \Rightarrow senx + c$, donde c es una constante de integración.

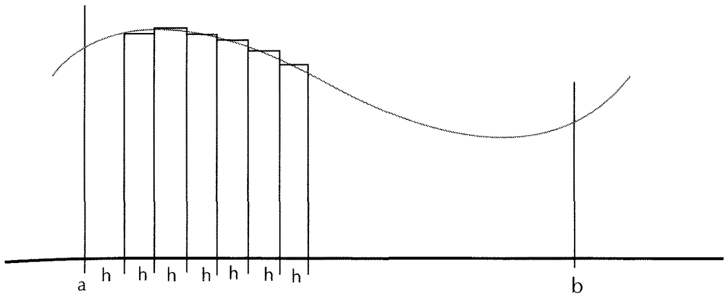
   Se cumple que $D_x [senx + c] = cosx$

16.2 La integral definida. Segundo teorema fundamental del cálculo

16.2.1 Definición

Las integrales nos sirven también para calcular el área de distintas figuras. Una integral es una sumatoria cuyo número de particiones es infinito.

16.2.2 Cálculo del área bajo la curva



En el ejemplo, vemos una función definida en el intervalo $[a;b]$. El área bajo la curva será aproximadamente la suma de todos los rectángulos de ancho h y de largo $f(x)$. El número de rectángulos sería $\dfrac{b-a}{h}$.

La integral permite calcular de manera *exacta* el área de una superficie cuyos bordes son curvas.

Ahora bien, en el gráfico podemos observar que a medida en que el número de rectángulos aumente, obtendremos una mayor exactitud en el cálculo del área. En el límite en el que el número de rectángulos (el número de particiones del intervalo $[a;b]$) tienda a infinito, el valor de h tenderá a cero, y tendremos exactamente el área bajo la curva.

Si $h \longrightarrow 0$, podemos decir que su magnitud es diferencial: $h = dx$.

El área de cada rectángulo será $f(x)$. dx y la suma de todos ellos se define por la integral:

$$\int_a^b f(x)dx$$

A esta operación se le llama integral definida. Su solución es:

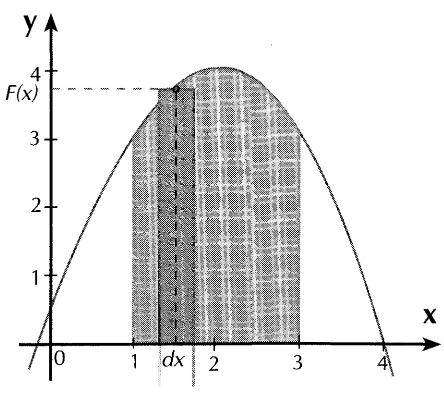
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplos:

1. Calcule el área de la región limitada por

   $y = 4x - x^2$; el eje x y las rectas $x = 1_e$, $x = 3$.

   Solución:



Si los datos hubieran sido dados en cm, el área estaría dada en cm^2; si hubieran sido dados en m, el área estaría en m^2. Pero ya que no nos han especificado las unidades, escribimos simplemente «unidades cuadradas».

El área del rectángulo será $F(x)\ .\ dx$ y la suma de todos los rectángulos comprendidos entre 0 y 3 será:

$$= \int_1^3 \left(4x - x^2\right)\ dx,$$

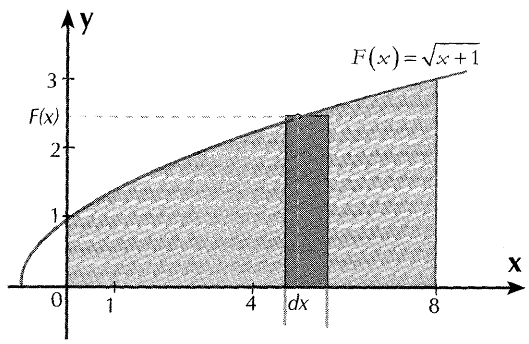
$$\Rightarrow A = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big|_1^3 = 2(3)^2 - \frac{1}{3}(3)^3 - \left(2(1)^2 - \frac{1}{3}(1)^3\right);$$

$$= 18 - 9 - \left(2 - \frac{1}{3}\right) = 7 + \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ A = \frac{22}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

2. Calcule el área de la región limitada por $y = \sqrt{x+1}$, el eje x, el eje y, y la recta $x = 8$.

Solución:



El área del rectángulo será $F(x)\ .\ dx$ y la suma de todos los rectángulos comprendidos entre 0 y 8 será:

$$= \int_0^8 \left(\sqrt{x+1}\right)\ dx = \int_0^8 (x+1)^{1/2}\ dx$$

$$A = \frac{(x+1)^{3/2}}{\frac{2}{3}}\Bigg|_0^8 = \frac{2}{3}(8+1)^{3/2} - \frac{2}{3}(0+1)^{3/2}$$

$$= 18 - \frac{2}{3} = \frac{54-2}{3}$$

$$\therefore A = \frac{52}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

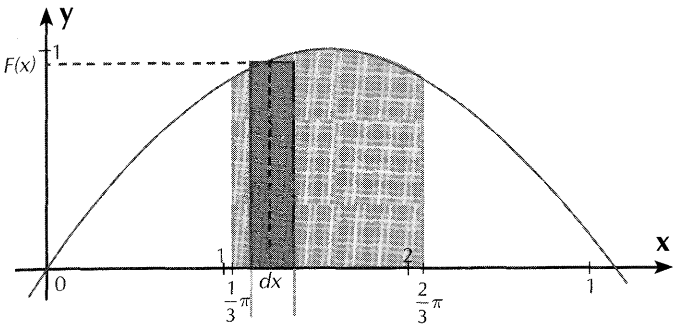
Recuerde:

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

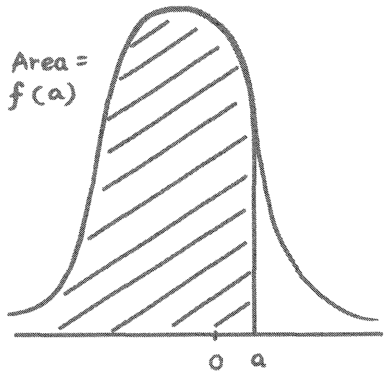
Ejercicios resueltos

1. Calcule el área de la región limitada por $y = senx$, el eje x y las rectas $x = \dfrac{\pi}{3}$ e $x = \dfrac{2\pi}{3}$.

Solución:



El área del rectángulo será $F(x)\,.\,dx$ y la suma de todos los rectángulos comprendidos entre $\dfrac{\pi}{3}$ y $\dfrac{2\pi}{3}$ será:



$$= \int_{\pi/3}^{2\pi/3} senx dx$$

$$\Rightarrow A = -cos\,x\Big|_{\pi/3}^{2\pi/3} = -cos(2\pi/3) + cos(\pi/3)$$

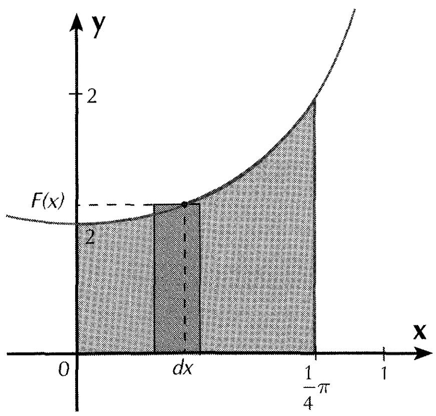
$$= -\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$\therefore\ A = 1$ unidades cuadradas

2. Calcule el área de la región limitada por

$$y = sec^2x,\ \text{el eje } x,\ \text{el eje } y \text{ y la recta } x = \frac{1}{4}\pi.$$

Solución:

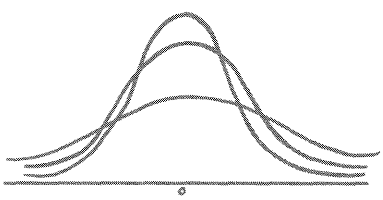


El área del rectángulo será $F(x)\,.\,dx$ y la suma de todos los rectángulos comprendidos entre 0 y $\frac{1}{4}\pi$ es:

$$= \int_0^{\pi/4} sec^2\, x dx$$

$$\Rightarrow A = tan\, x\Big|_0^{\pi/4} = tan(\pi/4) - tan(0) = 1 - 0$$

$\therefore\ A = 1$ unidades cuadradas

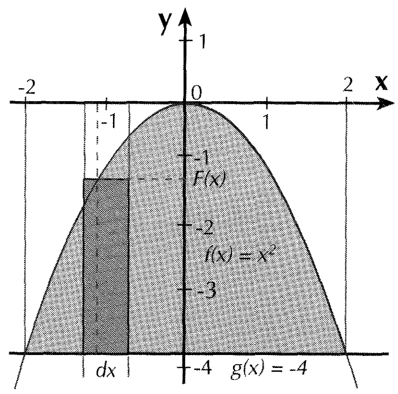


3. Calcule el área de la región limitada por $x^2 = -y;\ y = -4$.

Solución:

Dada la equivalencia de funciones, tenemos:

$x^2 = -y \ \Leftrightarrow\ 1y = -x^2;\ y = -4$. Sean $f(x) = -x^2$ y $g(x) = -4$.



Como se puede apreciar, las dos curvas se cortan en los puntos (-2;-4) y (2;-4); además, $f(x) \geq g(x)$ para toda $x \in [-2;2]$.

El área del rectángulo será $F(x)$ - $(g(x))\ dx$, en este caso, será $(-x^2 - (-4))dx$, $(4 - x^2)\ dx$ y la suma de todos los rectángulos será:

$$= \int_{-2}^{2} (4 - x^2) dx$$

$$\Rightarrow A = 4x - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-2}^{2} = 4(2) - \frac{1}{3}(2)^3 - \left(4(-2) - \frac{1}{3}(-2)^3\right) = 16 - \frac{16}{3}$$

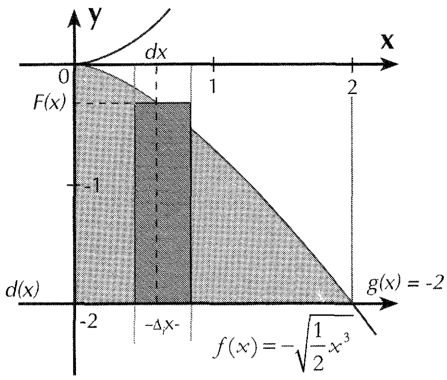
$\therefore\ A = \frac{32}{3}$ unidades cuadradas

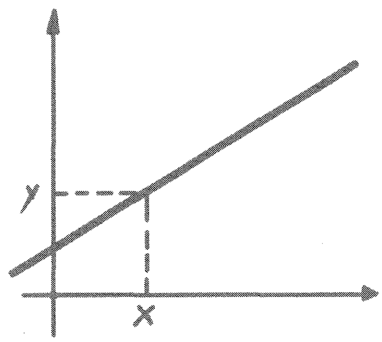
4. Calcule el área de la región limitada por $x^3 = 2y^2,\ x = 0,\ y = -2.$

Solución:

Dada la equivalencia de funciones $x^3 = 2y^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^3}$, y según las condiciones del ejercicio, sólo se toma $y = -\sqrt{\frac{1}{2}x^3}$.

Sean $f(x) = -\sqrt{\frac{1}{2}x^3}$ y $g(x) = -2$.





Para hallar los puntos donde las curvas se cortan, igualaremos sus ecuaciones y despejaremos x:

$-\sqrt{\frac{1}{2}x^3} = -2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 = 4 \Leftrightarrow x^3 = 8 \Leftrightarrow x = 2$: se cortan en el punto (2;-2).

Además, $f(x) \geq g(x)$ para toda $x \in [0,2]$.

El área del rectángulo será $F(x)$ - $(g(x)dx)$; es decir, $\left(2 - \sqrt{\frac{1}{2}x^3}\right)dx$, y la suma de las áreas de todos los rectángulos será:

$$A = \int_0^2 2 - \sqrt{\frac{1}{2}x^3}dx$$

$$\Rightarrow A = 2x - \frac{\sqrt{2}}{5}x^{5/2}\Big|_0^2 = 2(2) - \frac{\sqrt{2}}{5}(2)^{5/2} - \left(2(0) - \frac{\sqrt{2}}{5}(0)x^{5/2}\right) = 4 - \frac{8}{5} - (0)$$

$$\therefore\ A = \frac{12}{5} \text{ unidades cuadradas}$$

5. Calcule el área de la región limitada por $y = 2 - x^2e$; $y = -x$.

Solución:

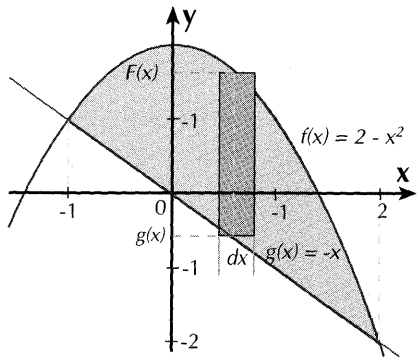
Hallemos la abscisa respectiva a los puntos donde las gráficas se intersectan entre sí:

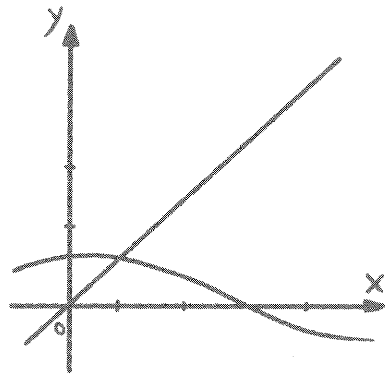
$2 - x^2 = -x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$

$\therefore\ x = -1 \lor x = 2$

La región está comprendida en el intervalo [-1;2].

Además, $f(x) \geq g(x);\ \forall\ x \in [-1;2]$.





El área del rectángulo será $(F(x) - g(x))$; es decir, $(2 + x - x^2)dx$, y la suma de todos los rectángulos será

$$A = \int_{-1}^{2} \left(2 + x - x^2\right)\, dx$$

$$\Rightarrow A = 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{2} = 2(2) + \frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{3}(2)^3 - \left(2(-1) + \frac{1}{2}(-1)^2 - \frac{1}{3}(-1)^3\right)$$

$\therefore\ A = \dfrac{9}{2}$ unidades cuadradas

6. Calcule el área de la región limitada por $y^2 = x$ y la recta $x = 4$.

Solución:

Dada la equivalencia de funciones, tenemos:

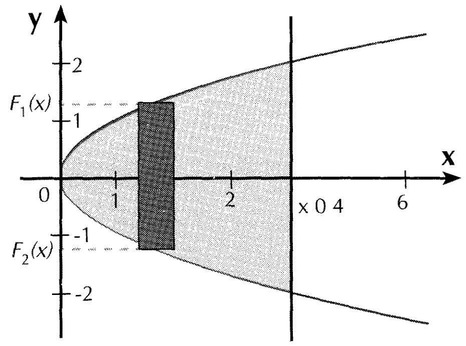
$$y^2 = x \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x}$$

Podemos dividir la función en:

$$F_1(x) = \sqrt{x}\ ;$$

$$F_2(x) = -\sqrt{x}$$

Se presenta a continuación la gráfica del área que se requiere conocer:



El área del rectánculo será $(F_1(x) - F_2(x)dx$, es decir,

$$\left(\sqrt{x} - \left(-\sqrt{x}\right)\right)\ dx \Rightarrow 2\sqrt{x}\ dx$$

y la suma de las áreas de todos los rectángulos será:

$$A = 2\int_0^4 \sqrt{x}dx = \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]\Bigg|_0^4$$

$$\Rightarrow A = \left[\frac{2}{3}4^{3/2} - \frac{2}{3}(0)^{3/2}\right] = \left[\frac{16}{3} - 0\right]$$

$$\therefore\ A = \frac{16}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

Ejercicios propuestos

1. Hallar el área de la región encerrada por las funciones:

a. $y = x^2;\ y = 36$

R. 288 u^2

b. $y = x^4;\ y = 16;\ x = -1;\ x = 1$

R. 31,6 u^2

c. $y = x^3;\ y = 0;\ x = 1;\ x = 2$

R. 3,75 u^2

d. $y = sen\ x;\ x = 0;\ x = 2$

R. 1,416 u^2

e. $y = (x - 1)^2;\ x = 0;\ x = 2$

R. 0,667 u^2

f. $y^2 = 2x + 1$; $y = x - 1$

R. 5,333 u^2

2. Después de experimentar, cierto fabricante determinó que si se producían x unidades de su producto, el costo marginal estaba dado por $0{,}3x - 11$, donde el costo de producción está dado en dólares. Si el precio de venta del artículo se fija en \$19 por unidad y el costo fijo es de \$100 por semana, encontrar el máximo lucro semanal que se puede obtener.

R. \$1400

3. Una industria hizo un análisis de sus instalaciones de producción y de personal. Con el equipo y número de trabajadores actuales, la fábrica puede producir 3000 unidades diarias. Se estimó que sin cambiar la inversión, la razón de cambio del número de unidades producidas por día respecto de un cambio en el número de empleados adicionales es $80 - 6x^{1/2}$, donde x es el número de empleados adicionales. Encontrar la producción diaria si se aumentan 25 empleados a la fuerza laboral.

R. 4500

4. La función de demanda para un producto es $p = f(q) = 100 - 0{,}05\,q$, donde p es el precio por unidad (\$) de q unidades. La función de oferta es $p = g(q) = 10 + 0{,}1q$. Determinar el excedente de los consumidores y de los productores, bajo equilibrio de mercado.

R. \$9000 y \$ 18 000

5. La función de costo marginal de un fabricante es $\frac{dc}{dq} = 0{,}2q + 8$.

Si c está en dólares, determine el costo de incrementar la producción de 65 a 75 unidades.

R. \$220

6. Una socióloga está estudiando la tasa de crímenes de cierta ciudad. Ella estima que t meses después del principio del próximo año, el número total de de crímenes se incrementará a razón de $8t + 10$ por mes. Determine el número total de crímenes que puede esperarse que se cometan el próximo año. ¿Cuántos crímenes puede esperarse que se cometan durante los últimos 6 meses de ese año?

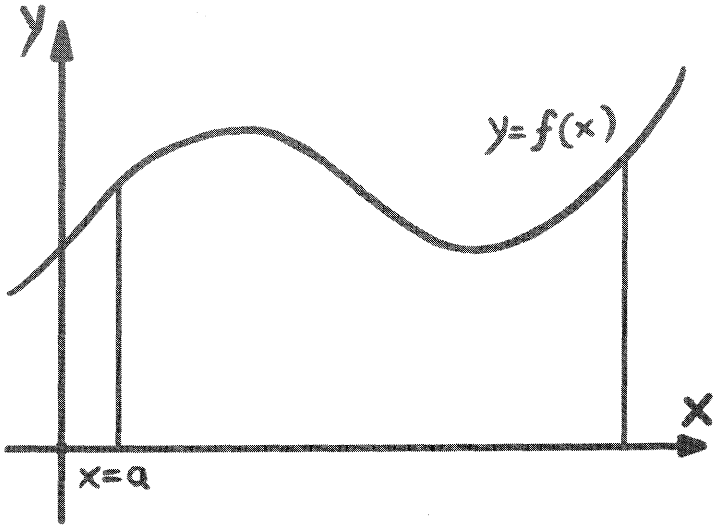
R. 696; 492

7. Un fabricante ha determinado que la función de costo marginal es

$$\frac{dc}{dq} = 0{,}003q^2 - 0{,}4q + 40;$$

Donde q es el número de unidades producidas. Si el costo marginal es de \$27,50 cuando $q = 50$ y los costos fijos son de \$5000, ¿cuál es el costo promedio de producir 100 unidades?

R. \$80 ($dc/dq = 27{,}50$ cuando $q = 50$ no es relevante para el problema).



Capítulo 17
TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

En este capítulo, veremos métodos para resolver integrales cuya solución no puede obtenerse de manera directa como en los casos del capítulo anterior.

17.1 Integración por cambio de variable

Elabore una tabla con las diferentes técnicas de integración.
¡No la memorice, practique con ella!

Consiste en reemplazar una parte de la función que se va a integrar por una variable auxiliar. Luego, debemos calcular la derivada de la variable auxiliar y reemplazarla en la integral, operando de manera tal que no aparezca la variable original.

Este método sólo será útil si conseguimos que la nueva integral sea más sencilla que la original.

Ejemplos:

1. $\int(x^3 + 2)^2 \,.\, 3x^2dx$

   Solución:

   Hacemos el cambio de variable $x^3 + 2 = u$. Si derivamos respecto de x, tendremos que $3x^2dx = du$.

   Así, tenemos la integral $\int(u)^2du$

   Por tanto, $\int (u)^2\, du = \dfrac{u^3}{3} + c$,

   Reemplazando $x^3 + 2 = u$

   $$\int \left(x^3 + 2\right)^2 3x^2dx = \frac{\left(x^3 + 2\right)^3}{3} + c$$

2. $\displaystyle\int \frac{x + 3}{\left(x^2 + 6x\right)^{1/3}}\, dx$

   Solución:

   Hacemos el cambio de variable $x^2 + 6x = u$. Si derivamos respecto de x, tendremos que

$$(2x+6)dx = du \Leftrightarrow (x+3)dx = \frac{du}{2}$$

Así, tenemos la integral $\int \frac{1}{(u)^{1/3}}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{-1/3}du = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{2/3}}{2/3} = \frac{3}{4}u^{2/3} + c$

Reemplazando $x^2 + 6x = u$

$$\int \frac{x+3}{\left(x^2+6x\right)^{1/3}}dx = \frac{3}{4}\left(x^2+6x\right)^{2/3} + c$$

17.2 Integración por partes

Sabemos por la fórmula de la derivada de un producto que

$$d(uv) = udv + vdu$$

Podemos expresar esta ecuación de la siguiente forma:

$$udv = d(uv) - vdu$$

Si integramos cada miembro de la ecuación, tendremos:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

Si resolvemos la integral del medio, obtendremos la fórmula para la integración por partes.

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Este procedimiento se usa para integrales de la forma $\int udv$. Para aplicarlo, debemos descomponer la función que vamos a integrar en dos factores u y dv. Derivando u podremos calcular du, e integrando dv podremos calcular v. Luego, reemplazamos esos valores en la fórmula de integración por partes. Para que el método sea efectivo, la integral resultante $\int vdu$ debe ser más sencilla que la integral original $\int udv$.

Debido a que

$$d(uv) = udv + vdu,$$

tenemos:

$$\int vdu = uv - \int vdu$$

Ejemplos:

1. $\int xsenxdx$

Solución:

Sabemos que $\int udv = uv - \int vdu$

Hacemos $x = u$ y $senx = dv$. Si derivamos la primera igualdad respecto de x e intregramos la segunda igualdad, tendremos $du = dx$ y $-cosx = v$.

$$\begin{aligned}\int xsenxdx &= x\,.\,(-cosx) - \int(-cosx)dx\\ &= -xcosx + \int cosxdx\end{aligned}$$

$\int xsenxdx = x\ .\ (-cosx) - \int (-cosx)dx = -xcosx + \int cosxdx$

$\int xsenxdx = -xcosx - senx + c$

2. $\int lnxdx$

Solución:

Sabemos que $\int udv = uv - \int vdu$

Hacemos $lnx = u$ y $dx = dv$. Si derivamos la primera igualdad respecto de x e intregramos la segunda, tendremos $\frac{1}{x}dx = du$ y $x = v$. Entonces

$$\int ln\,xdx = x\,ln\,x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x\,ln\,x - x + c$$

17.3 Integración por fracciones parciales

Este método se aplica para integrales de la forma $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$

Revise el primer capítulo, en el que vimos operaciones con fracciones algebraicas.

El grado del numerador debe ser menor que el del denominador. En caso contrario, debemos efectuar la división según la fórmula.

$$P(x) = Q(x)C(x) + R(x)$$

Si dividimos la ecuación entre $Q(x)$, obtendremos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)C(x)}{Q(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Simplificamos e integramos cada miembro de la ecuación:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} = \int C(x) + \int \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Así, la integral nos queda como la suma de una integral simple y la integral de una fracción cuyo numerador tiene un grado menor que el del denominador.

Aplicación del método:

Este método consiste en separar la integral $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones más simples.

Primero, debemos factorizar el denominador. Al descomponer la fracción, obtendremos sumas cuya forma será alguna de las cuatro siguientes:

1. $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d}+...$$

2. $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}+...$$

3. $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Cx+D}{dx^2+ex+f}+...$$

4. $$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^2}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}+...$$

El problema se centra en el cálculo de las constantes A, B, C... Para ello, podemos dar valores a la variable x y resolver los sistemas de ecuaciones que se presenten. Esto se verá más claramente con los siguientes ejemplos.

Ejemplos:

1. $$\int\frac{6x-11}{(x-1)^2}dx$$

Solución:

Tenemos que $\frac{6x-11}{(x-1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}\Leftrightarrow\frac{6x-11}{(x-1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{(x-1)B}{(x-1)^2}$.

Luego, si $x = 1 \Rightarrow -5 = A$ y si $x = 0 \Rightarrow -11 = A - B \Rightarrow B = 6$; en consecuencia,

$$\int\frac{6x-11}{(x-1)^2}dx=\int\left(\frac{-5}{(x-1)^2}+\frac{6}{x-1}\right)dx=\frac{5}{x-1}+6\ln|x-1|+C$$

En el ejercicio 1,
los valores 0 y 1 han sido asignados de manera arbitraria.
Si la igualdad se cumple para todo x, deberá cumplirse también para cualquier x específico (en este caso, 0 y 1).

2. $$\int\frac{2x+1}{x^3-7x+6}dx$$

Solución:

Como $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$ y

$$=\frac{2x+1}{x^3-7x+6}=\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}$$

$$2x + 1 = (x - 2)(x + 3)A + (x - 1)(x + 3)B + (x -1)(x - 2)C$$

Luego, si $x = 1 \Rightarrow A = -3/4$, si $x = 2 \Rightarrow B = 1$ y si $x = -3$ $\Rightarrow -5 = -4(-5)C \Rightarrow C = -1/4$

Así, tenemos:

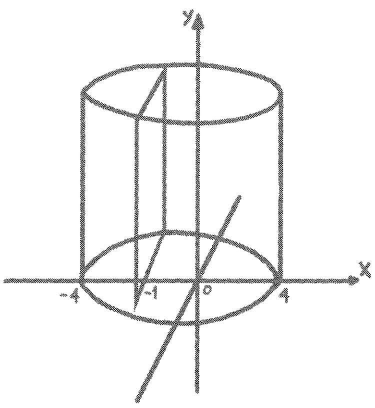
$$\int \frac{2x+1}{x^3-7x+6}\,dx = \int\left(\frac{-3/4}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{-1/4}{x+3}\right)dx$$

$$= -\frac{3}{4}ln|x-1| + ln|x-2| - \frac{1}{4}ln|x+3| + C$$

17.4 Fórmulas básicas

17.4.1 Forma $\int u^2 dx$

1. $\int(2x-3)^{1/2}dx$



Solución:

Haciendo la sustitución $2x - 3 = u$ y derivando respecto de x, tenemos:

$$2dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

Entonces,

$$\int(2x-3)^2dx = \int u^{1/2}.\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int u^{1/2}du = \frac{1}{2}.\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3}u^{3/2} + C$$

Reemplazando $2x - 3 = u$

$$\int(2x-3)^{1/2}dx = \frac{1}{3}(2x-3)^{3/2} + C$$

2. $\int\frac{dx}{(2x-1)^2}$

Haciendo la sustitución $2x - 1 = u$ y derivando respecto de x, tenemos:

$$2dx = du \;\Rightarrow\; dx = \frac{1}{2}du$$

$$\int\frac{dx}{(2x-1)^2} = \int\frac{\frac{1}{2}du}{u^2} = \frac{1}{2}\int u^{-2}du = -\frac{1}{2u} + C$$

Reemplazando $2x - 1 = u$

$$\int\frac{dx}{(2x-1)^2} = \frac{1}{2(1-2x)} + C$$

17.4.2 Forma $\int u^{-1}dx$

1. $\int \frac{dx}{3x+5}$

Solución:

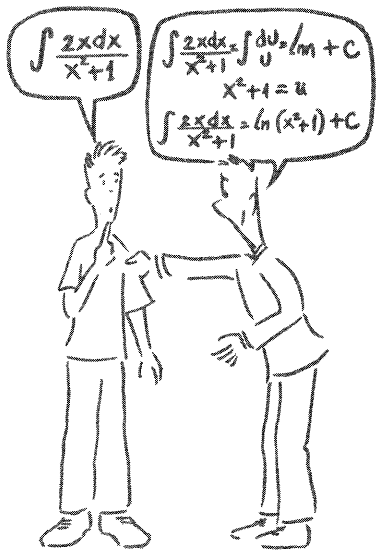
Si observamos la función $3x + 5 \Rightarrow d(3x + 5) = 3dx$, el resultado tiene gran similitud con el dx. Haremos la sustitución $3x + 5 = u$ y tomando diferenciales, tendremos:

$$3dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{3}. \quad \int \frac{dx}{3x+5} = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} ln\, u + C.$$

Reemplazando $3x + 5 = u$, tenemos

$$\int \frac{dx}{3x+5} = \frac{1}{3} ln(3x+5) + C$$

2. $\int \frac{2xdx}{x^2+1}$



Solución:

Podemos ver que la función del denominador es un grado mayor que la del denominador: $x^2 + 1$. Derivando, tenemos $\Rightarrow 2xdx$, que coincide con el numerador.

Por tanto, la sustitución será $x^2 + 1 = u$, y tomando diferenciales, tenemos $2xdx = du$.

Entonces $\int \frac{2xdx}{x^2+1} = \int \frac{du}{u} = ln\, u + C$

Reemplazando $x^2 + 1 = u$

$$\int \frac{2xdx}{x^2+1} = ln\,\left(x^2+1\right) + C$$

17.4.3 Forma $\int e^u dx$

1. $\int e^{-x^2+2}xdx$

Solución:

Si observamos el exponente, nos daremos cuenta de que:

$$d(-x^2 + 2) = -2xdx$$

y tiene una forma parecida a la función que acompaña a la exponencial.

Con la sustitución $-x^2 + 2 = u \Rightarrow -2xdx = du \Leftrightarrow xdx = -\frac{du}{2}$,

tenemos que en la integral $\int e^u \cdot -\frac{du}{2} = -\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^u + c$

Reemplazando nuevamente la equivalencia en la integral, obtendremos:

$$-\frac{1}{2}e^{-x^2+2} + c$$

17.4.4 Forma $\int ln(u)dx$

1. $\int x^{-1/2} lnx dx$

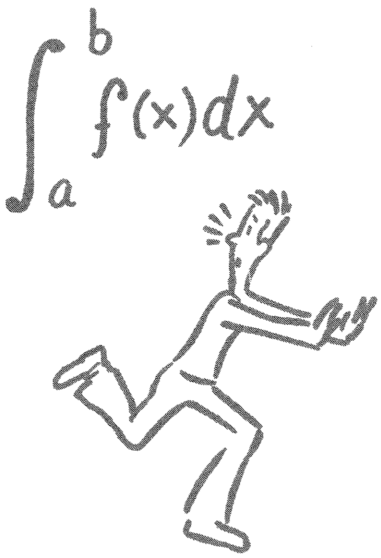
Solución:

Sea $u = ln\,x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$; $dv = x^{-1/2}dx \Rightarrow v = 2x^{1/2}$. Así,

$$\int \frac{ln\,x}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\,ln\,x - \int 2x^{1/2} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= 2\sqrt{x}\,ln\,x - 2\int x^{-1/2}dx$$

$$= 2\sqrt{x}\,ln\,x - 4\sqrt{x} + C$$



2. $\int \frac{dx}{x(4 + ln^2 x)}$

Solución:

También se representa como $\int \frac{1}{4 + (ln\,x)^2} \cdot \frac{dx}{x}$

Si reemplazamos $(ln\,x)^2$ p. r $4u^2$, tendremos:

$$\int \frac{1}{1 + u^2}$$

Entonces

$$ln\,x = 2u \quad \text{o} \quad \frac{ln\,x}{2} = u; \quad \frac{dx}{x} = 2u$$

$$\int \frac{1}{4 + (ln\,x)^2} \cdot \frac{dx}{x} = 2\int \frac{du}{4 + 4u^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1 + u^2} = \frac{1}{2} arctgu + C$$

Reemplazando $\frac{ln\,x}{2} = u$

$$\int \frac{dx}{x\left(4+ln^2 x\right)} = \frac{1}{2} arctg \frac{ln\,x}{2} + C = \frac{1}{2} arctg\, ln\sqrt{x} + C$$

17.5 Integrales trigonométricas

Las fórmulas para resolver integrales trigonométricas son las siguientes:

a. $\int senxdx = -cosx + c$

b. $\int cosxdx = senx + c$

c. $\int tgxdx = -ln|cosx| + c$

d. $\int ctgxdx = ln|senx| + c$

e. $\int secxdx = ln|secx + tgx| + c$

f. $\int cscxdx = ln|cscx - ctgx| + c$

1. $\int sen^3xdx$

Solución:

Usando la identidad trigonométrica $sen^2x + cos^2 x = 1$, tenemos:

$\int sen^3xdx = \int senxsen^2xdx = \int senx(1 - cos^2x)dx$

$\int sen^3xdx = \int senxdx + \int cos^2x(-senxdx)\ 1\ dx \Rightarrow -cos\,x + \frac{cos^3 x}{3}$

Recuerde las siguientes identidades trigonométricas:

$Sen^2 \alpha + Cos^2 \alpha = 1$

$Sec^2 \alpha = 1 + Tg^2 \alpha$

2. $\int sen^3xcosxdx$

Solución:

Observamos que al tomar diferenciales, tenemos $d(senx) = cosxdx$

Entonces, la integral se puede definir como $\int sen^3xdsenx$

Haciendo $u = senx$, tenemos $\int u^3du = \frac{u^4}{4} + C$

Reemplazando $u = senx$, $\int \frac{sen^4 x}{4} + C$

Ejercicios resueltos

1. $\int tan^4 x dx$

Solución:

Utilizando la identidad $tan^2 x = sec^2 x - 1$, obtenemos:

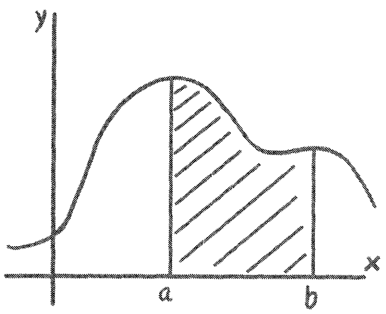
$$\int tan^4 x dx = \int tan^2 x(sec^2 - 1)dx = \int tan^2 x sec\, x dx - \int tan^2 x dx$$

Realizamos la sustitución $tan\ x = u$ para la primera integral y tomando diferenciales $senx2xdx = du$. Para la segunda integral, volveremos a hacer uso de la identidad trigonométrica.

$$\int tan^4 xdx = \int u^2 du - \int \left(sec^2 - 1\right) dx = \int u^2 du - \int sec\, xdx + \int dx$$

$$= \frac{u^3}{3} - tan\, x + x + C$$

$$\int tan^4 xdx = \frac{tan^3 x}{3} - tan\, x + x + C$$



2. $\int tan^5 x sec^7 x dx$

Solución:

Usando la identidad $tan^2 x = sec^2 x - 1$.

Para trabajar con más comodidad, degradaremos a cada función trigonométrica. Se tiene:

$$\int tan^5 x sec^7 x dx = \int tan^4 x sec^6 x . secx tanx dx$$

$$\int tan^5 x sec^7 x dx = \int (sec^2 x - 1)^2 sec^6 x tanx dx$$

Llevando todo en función de la $secx$, tenemos:

$$\int tan^5 x\, sec^7 xdx = \int (sec^{10} x - 2\, sec^8 x + sec^6 x) sec\, x\, tan\, xdx$$

$$= \int (sec^{10} x - 2\, sec^8 x + sec^6 x) d(sec\, x)$$

$$= \frac{sec^{11} x}{11} - \frac{2}{9} sec^9 x + \frac{sec^7 x}{7} + C$$

3. $\int tan\, dx$

Solución:

Reescribiendo la integral:

$\int \frac{senx}{cos\,x}dx$. Mediante la sustitución $cos\ x = u \Rightarrow senxdx = du$ y

reemplazando en la integral: $\int \frac{-du}{u} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C$

Volviendo a sustituir $u = \cos x$

$\int \tan x dx = -h\ |\cos x| + C = h\ |\sec x| + C$

Recuerde la siguiente identidad trigonométrica:

$$tgx = \frac{senx}{Cosx}$$

4. $\int \frac{sen2x}{3+cos\,2x}dx$

Solución:

Sea $u = 3 + cos2x \Rightarrow 2udu = dx$; por lo tanto,

$$I = -\frac{1}{2}\int \frac{-2sen2xdx}{3+cos\,2x} = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}ln|u| + C$$

Reemplazando $u = 3 + cos^2x$

$$\int \frac{sen2x}{3+cos\,2x}dx = -\frac{1}{2}ln|3+cos\,2x| + C$$

5. $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+1+\sqrt{x+1}}dx$

Solución:

Sea $u^2 = x + 1 \Rightarrow 2udu$; luego, tenemos $u = \sqrt{x+1}$

$$I = \int \frac{u}{u^2+u} \cdot 2udu = 2\int \frac{udu}{u+1} = 2\int \frac{(u+1-1)}{u+1}du = 2\int \left(\frac{u+1}{u+1} - \frac{1}{u+1}\right) du$$

$$= 2\int du = -2\int \frac{du}{u+1} = 2u - 2\,ln|u+1| + C$$

Reemplazando $u = \sqrt{x+1}$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+1+\sqrt{x+1}}dx = 2\sqrt{x+1} - 2\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right| + C$$

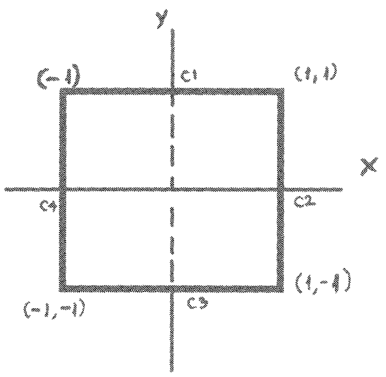
6. $\int (x^2 + 2)dx$

Solución:

Hacemos $u = x^2$ y $dv = dx$; donde $du = \dfrac{2xdx}{x^2+2}$ y $v = x$; por tanto,

$$\int (x^2+2)dx = x\,ln(x^2+2) - \int \frac{2x^2dx}{x^2+2} = x\,ln\left(x^2+2\right) - \int \left(2 - \frac{4}{x^2+2}\right)dx$$

$$= x\,ln(x^2+2) - 2x + 2\sqrt{2}arctan\,x/\sqrt{2} + C$$



7. $\int \frac{x\cos x}{sen^3 x}dx$

Solución:

Sea $u = x \Rightarrow du = dx;\ dv = \dfrac{\cos x}{sen^3 x}dx \Rightarrow v = -\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{sen^2 x}$, entonces

$$\int \frac{x\cos x}{sen^3 x}dx = \int x \cdot \frac{\cos x}{sen^3 x}dx = -\frac{1}{2}\frac{x}{sen^2 x} + \frac{1}{2}.\int \frac{1}{sen^2 x}dx$$

$$= -\frac{1}{2}.\frac{x}{sen^2 x} + \frac{1}{2}\int csc^2 x dx = -\frac{1}{2}.\frac{x}{sen^2 x} - \frac{1}{2}cot\,x + C$$

8. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1}dx$

Solución:

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, tenemos que dividir:

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 5x - 3}{x^2 - 1} = x - 6 + \frac{6x - 9}{x^2 - 1},$$

Basta descomponer en fracciones parciales el ultimo sumando, esto es:

$$\frac{6x-9}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1} \iff \frac{6x-9}{x^2-1}=\frac{A(x+1)}{x^2-1}+\frac{B(x-1)}{x^2-1},$$

Se trata de una identidad que debe cumplirse para cualquier valor de x. Podemos asignarle los valores que nos convengan.

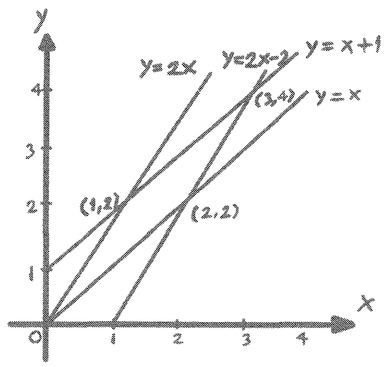
Si $x=-1 \Rightarrow -15=-2B \Rightarrow B=15/2$ y si $x=1 \Rightarrow -3=2A \Rightarrow A=-3/2$

Así, tenemos:

$$\int\frac{x^3-6x^2+5x-3}{x^2-1}dx=\int\left(x-6+\frac{-3/2}{x-1}+\frac{15/2}{x+1}\right)dx$$

$$=\int xdx-\int 6dx-3/2\int\frac{dx}{x-1}+15/2\int\frac{dx}{x+1}$$

$$=\frac{x^2}{2}-6x-\frac{3}{2}ln|x-1|+\frac{15}{2}ln|x+1|+C$$



9. $$\int\frac{xdx}{\sqrt{2x^2+5}}$$

Solución:

Si derivamos de $2x^2+5$, tendremos $\Rightarrow d(2x^2+5)=4xdx$. Podemos observar que tiene cierta similitud con el numerador de la integral. Luego, sustituimos $2x+5=u$ en los dos miembros de la igualdad:

$$4xdx=du \quad\Rightarrow\quad xdx=\frac{1}{4}du$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{2x^2+5}}=\int\frac{\frac{1}{4}du}{\sqrt{u}}=\frac{1}{4}\int u^{-1/2}du=\frac{1}{4}\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{2}\sqrt{u}+C$$

Reemplazando $2x+5=u$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{2x^2+5}}=\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+5}+C$

10. $$\int x\sqrt{x+1}dx$$

Solución:

Podemos hacer aparecer el término $x+1$:

$$\int x\sqrt{x+1}\ .\ dx = \int (x+1-1)\sqrt{x+1}\ .\ dx$$

$$\int x\sqrt{x+1}\ .\ dx = \int x+1\sqrt{x+1}dx - \int \sqrt{x+1}dx$$

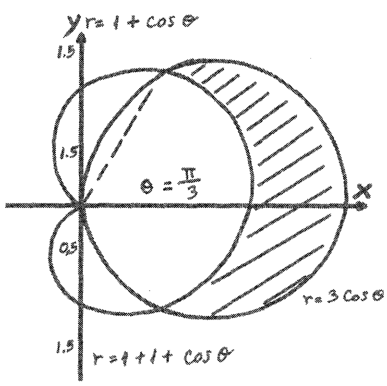
Ahora, la solución es más sencilla:

$$\int x\sqrt{x+1}\ .\ dx = \int x+1\sqrt{x+1}dx - \int \sqrt{x+1}dx$$

$$\int x\sqrt{x+1}\ .\ dx = \int (x+1)^{3/2}dx - \int (x+1)^{1/2}dx$$

$$\int x\sqrt{x+1}\ .\ dx = \frac{(x+1)^{5/2}}{5/2} - \frac{(x+1)^{3/2}}{3/2} + C$$

$$\int x\sqrt{x+1}\ .\ dx = \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C$$



11. $$\int \frac{(ln\, x)^3}{x}dx$$

Solución:

Si asumimos que $ln\ x = u$, entonces $(ln\ x)^3 = u^3$ y $\dfrac{dx}{x} = du$

Por lo tanto, $\displaystyle\int \frac{(ln\, x)^3}{x}dx = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$

Reemplazando $ln\ x = u$; $\displaystyle\int \frac{(ln\, x)^3}{x}dx = \frac{1}{4}(ln\, x)^4 + C$

12. $$\int \frac{ln\, x + 4}{(4\, ln^2\, x - 16)x}dx$$

Solución:

Reagrupamos convenientemente:

$$\int \frac{ln\, x + 4}{(4\, ln^2\, x - 16)x}dx = \int \frac{ln\, x + 4}{(4\, ln^2\, x - 16)}\frac{1}{x}dx$$

Con el cambio de variable $ln\, x = u \Rightarrow \dfrac{1}{x}dx = du$ y empleando el método de las fracciones parciales, tenemos:

$$\frac{u+4}{4u^2-16}=\frac{\frac{u}{4}+1}{u^2-4}=\frac{A}{u-2}+\frac{B}{u+2}$$

De donde obtenemos $A = 3/8$ y $B = -1/8$

Por tanto, $\int \frac{\ln x+4}{4\ln^2 x-16}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{3}{8}\int\frac{du}{u-2}-\frac{1}{8}\int\frac{du}{u+2}$

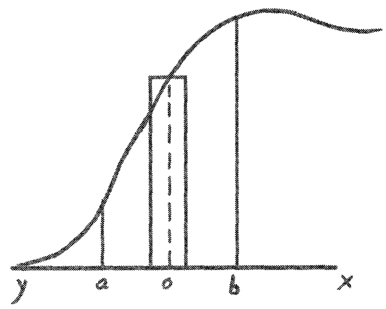
Integrando $\int \frac{\ln x+4}{4\ln^2 x-16}\frac{1}{x}dx=\frac{3}{8}\ln|u-2|-\frac{1}{8}\ln|u+2|+C$

Volviendo a hacer la sustitución $u = \ln x$

$$\int \frac{\ln x+4}{4\ln^2 x-16}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{3}{8}\ln|\ln x-2|-\frac{1}{8}\ln|\ln x+2|+C$$

13. $\int x^3 e^{x^4}dx$

Solución:



Observamos que el exponente de la función exponencial es x^4, y que $dx^4 = 4x^3dx$, este resultado tiene gran similitud con la función que acompaña a la exponencial.

Realizando la sustitución $x^4 = u$ y tomando diferenciales, obtenemos:

$$4x^3dx=du \Rightarrow x^3dx=\frac{du}{4}$$

Sustituyendo en la integral, tendremos:

$$\int e^{x^4}\cdot x^3dx=\int e^u\frac{du}{4}=\frac{1}{4}\int e^u du=\frac{e^u}{4}+C$$

Reemplazando: $x^4 = u$; $\int e^{x^4}\cdot x^3dx=\frac{e^{x^4}}{4}+C$

14. $\int\sqrt[3]{e^{2x}+2e^x+1}e^x dx$

Solución:

Entonces $\int\sqrt[3]{\left(e^x+1\right)^2}e^x dx$

Además, tenemos que $de^x = e^x dx$, y con ello podemos emplear la sustitución $e^x = u$

$$\int \sqrt[3]{(u+1)^2}\,du = \int (u+1)^{2/3}\,du = \frac{(u+1)^{5/3}}{5/3} + C$$

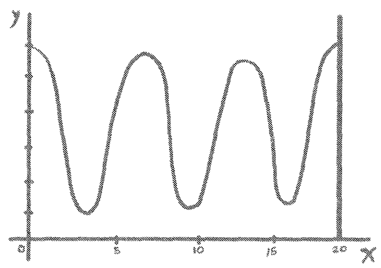
Reemplazando $e^x = u$, nos queda: $\int \sqrt[3]{(u+1)^2}\,du = \frac{3}{5}\left(e^x+1\right)^{5/3} + C$

15. $\int cos^5\, xdx$

Solución:

Es conveniente, por lo general, trabajar con potencias pares para hacer uso de las identidades trigonométricas. Por tanto, $\int cos^4 x \,.\, cos\, xdx$

Haciendo uso de la identidad $cos^2 x = 1 - sen^2\, x$, se tiene:



$$\int cos^5\, xdx = \int (1 - sen^2\, x)^2 cosxdx = \int (1 - 2\, sen^2\, x + sen^4 x) cosxdx$$

$$= \int cosxdx - 2\int sen^2\, x\, cosxdx + \int sen^4\, x\, cosxdx$$

Además, podemos emplear la sustitución $senx = u$. Y aplicando diferenciales $cosxdx = du$, tenemos:

$$\int cos^5\, xdx = \int du - 2\int u^2 du + \int u^4 du$$

$$\int cos^5\, xdx = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{u^5}{5} + C$$

Reemplazando con $u = senx$, nos queda:

$$\int cos^5\, xdx = senx - \frac{2}{3}sen^3 x + \frac{sen^5 x}{5} + C$$

16. $\int cos^3 \frac{x}{3} dx$

Solución:

Aplicando la identidad trigonométrica $cos^2 x = 1 - sen^2 x$, se tiene:

$$\int \left(1 - sen^2 \frac{x}{3}\right) cos \frac{x}{3} dx = \int cos \frac{x}{3} dx - \int \left(sen^2 \frac{x}{3}\right) cos \frac{x}{3} dx$$

Aplicando la sustitución $\frac{x}{3} = u \Rightarrow dx = 3du$, tendríamos:

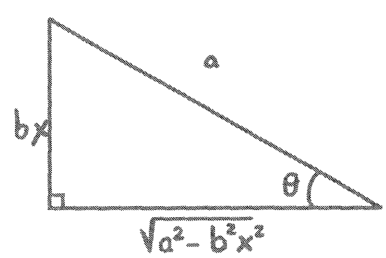
$$\int\left(1-sen^2\frac{x}{3}\right)cos\frac{x}{3}dx=\frac{1}{3}\int cos\,udu-\frac{1}{3}\int sen^2u\,cos\,udu$$

$$\int\left(1-sen^2\frac{x}{3}\right)cos\frac{x}{3}dx=\frac{1}{3}\int cos\,udu-\frac{1}{3}\int sen^2u\,cos\,udu$$

Integrando $\int\left(1-sen^2\frac{x}{3}\right)cos\frac{x}{3}dx=\frac{1}{3}senu-\frac{1}{9}sen^3u+C$

Sustituyendo $u=\frac{x}{3}$, tenemos $\int cos^3\frac{x}{3}dx=\frac{1}{3}sen\frac{x}{3}-\frac{1}{9}sen^3\frac{x}{3}+C$

17. $\int tan^6 xdx$



Solución:

Usando la identidad $\int tan^2x = sec^2x - 1$, obtenemos:

$\int tan^6 xdx = \int tan^4 x(sec^2x - 1)dx = \int tan^4 xsec^2xdx - \int tan^4 xdx \Rightarrow$
$\int tan^4xsec^2xdx - \int tan^2 x(sec^2x - 1)dx$

$\int tan^6 xdx = \int tan^4 xsec^2xdx - \int tan^2 x sec^2xdx + \int tan^2 xdx$

En las dos primeras integrales, $d\,tan\,x = sec^2xdx$, por lo que debemos hacer el cambio de variable $tanx = u \Rightarrow sec^2xdx = du$.

En la tercera integral, volveremos a emplear la identidad trigonométrica $tan^2x = sec^2x - 1$ antes del cambio de variable.

$\int tan^6 xdx = \int u^4 xdu - \int u^2du + \int(sec^2x - 1)dx$

$\int tan^6 xdx = \int u^4 xdu - \int u^2du + \int sec^2xdx - \int dx$

$\int tan^6 xdx = \int u^4 xdu - \int u^2du + \int du - \int dx$

$$\int tan^6 xdx=\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}+u-x+C$$

Sustituimos $u = tanx$; $\int tan^6 xdx=\frac{tan^5 x}{5}-\frac{tan^3 x}{3}+tan\,x-x+C$

18. $\int tan^{3/2} x sec^4 x dx$

Solución:

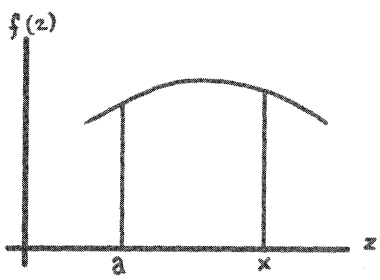
Usando la identidad $sec^2 x = 1 + tan^2 x$, obtenemos:

$$\int tan^{3/2} x\, sec^4 x dx = \int tan^{3/2} x\left(1+tan^2 x\right)\, sec^2 x dx$$

$$= \int tan^{3/2} x\, sec^2 x dx + \int tan^{7/2} x\, sec^2 x dx$$

$$= \frac{2}{5} tan^{5/2} + \frac{2}{9} tan^{9/2} x + C$$

Ejercicios propuestos



1. $\int \frac{dx}{x^{1/2} - x^{1/4}}$

R. $4\,ln\left(\sqrt[4]{x}-1\right)+2\sqrt{x^1}+4\sqrt[4]{x^1}+c$

2. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$

R. $2\sqrt{x} - 2arctg\sqrt{x} + c$

3. $\int (x^2 - 1)^{5/2} dx$

R. $\frac{1}{48} x\sqrt{x^2-1}\left(8x^4 - 26x^2 + 33\right) - \frac{5}{16} ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c$

4. $\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^3}$

R. $\frac{1}{16}\left(\frac{10x-6x^3}{\left(x^2-1\right)^2} + 3\,ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) + c$

5. $\int \frac{2x^2+3}{\left(x^2+1\right)^2} dx$

R. $\frac{x}{2\left(1+x^2\right)} + \frac{5arctgx}{2} + c$

6. $\int \frac{dx}{e^{2x} - 3e^{x}}$

R. $\frac{1}{9}\left(ln\left(3e^{-x} - 1\right) + 3e^{-x} \right) + c$

7. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4 + x^2}}$

R. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}} = \frac{ln\,x}{2} - ln\left(\frac{\sqrt{x^2+4}}{2} + 2 \right) + c$

8. $\int \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{x} dx$

R. $3\,ln\,x - 3\,ln\left(\sqrt{9-4x^2} + 3 \right) + \sqrt{9-4x^2} + c$

9. $\int \frac{dx}{x + x^{1/3}}$

R. $\frac{3}{2} ln\left(\sqrt[3]{x^2} + 1 \right) + c$

10. $\int \frac{4x^2 dx}{x^3 + 3}$

R. $\frac{4}{3} ln\left(x^3 + 3 \right) + c$

11. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$

R. *arcsen* $(e^x) + c$

12. $\int \frac{e^{ln\,x} \bullet ln\,x}{x} dx$

R. $x\,ln\,x - x$

13. $\int x^{-1}\, ln^2 x dx$

R. $\frac{ln^3 x}{3} + c$

14. $\int ln^2 x dx$

R. $\int ln^2 xdx = x\left(\left(ln\, x-2\right)ln\, x+2\right)+c$

15. $\int tan^4 x sec^2 x dx$

R. $tg^5\, x / 5 + c$

16. $\int sen^6 x dx$

R. $\frac{5x}{16}-\frac{15}{64}sen2x+\frac{3}{64}sen4x-\frac{1}{192}sen6x+c$

17. $\int tg^5 x dx$

R. $\frac{sec^4\, x}{4}-sec^2\, x-ln\, cos\, x+c$

18. $\int sen2x cos x dx$

R. $-\frac{2}{3}cos^3\, x+c$

19. $\int \frac{cos^4\, x+cos^2\, x}{sen^2 x-1}dx$

R. $-\frac{3}{2}x-\frac{cos\, x sen x}{2}+c$

20. $\int cos4x.cos2x dx$

R. $\frac{sen2x}{4}+\frac{sen6x}{12}+c$

21. Si la función costo marginal viene dada por $\frac{x^2+2}{x+1}$ y el costo fijo es de \$500, encontrar la función costo total.

R. $C(x)=\frac{(x-1)^2}{2}+3ln\left|x-1\right|+499,5$

22. Se estima que dentro de t años, contados a partir de ahora, el valor V (en dólares) de un acre de tierra cerca del pueblo de Leymebamba, estará creciendo a razón de $\frac{8r^3}{\sqrt{0.2r^4+8000}}$ dólares por año. Si el

valor de la tierra es actualmente de \$500 por acre, ¿cuánto costará dentro de 10 años?

R. \$711

23. La propensión marginal al ahorro en cierto país está dada por, $\frac{dS}{dI} = 5/(I+2)^2$ donde S e I representan el ahorro y el ingreso totales nacionales, respectivamente, y están medidos en miles de millones de dólares. Si el consumo total nacional es de \$7,5 mil millones cuando el ingreso total nacional es de \$8 mil millones, ¿para qué valor o valores de I el ahorro total nacional es igual a cero?

R. \$3 mil millones

24. Un modelo para describir la difusión de un rumor financiero es que la tasa de propagación es proporcional al producto de la fracción de la población que ha escuchado el rumor y la fracción que no lo ha hecho.

a) Escriba una función que sea satisfecha por y.

b) Resolver la ecuación.

c) En un poblado pequeño de mil habitantes, 80 personas han escuchado el rumor de quiebra de un banco a las 8 am. Para el mediodía, la mitad de la población lo ha escuchado y hay pánico. ¿A qué hora el 90% de la población habrá escuchado el rumor?

R. a) $\frac{dy}{dt} = ky(1-y)$

b) $y = y_0 / \left[y_0 + (1-y_0) e^{-kt} \right]$

c) 3:36 pm

25. Suponga que la función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por:

$\frac{dc}{dq} = \frac{100q^2 - 4998q + 50}{q^2 - 50 + 1}$, donde c es el costo total en dólares

cuando se producen q unidades.

a) Determine el costo marginal cuando se producen 50 unidades.

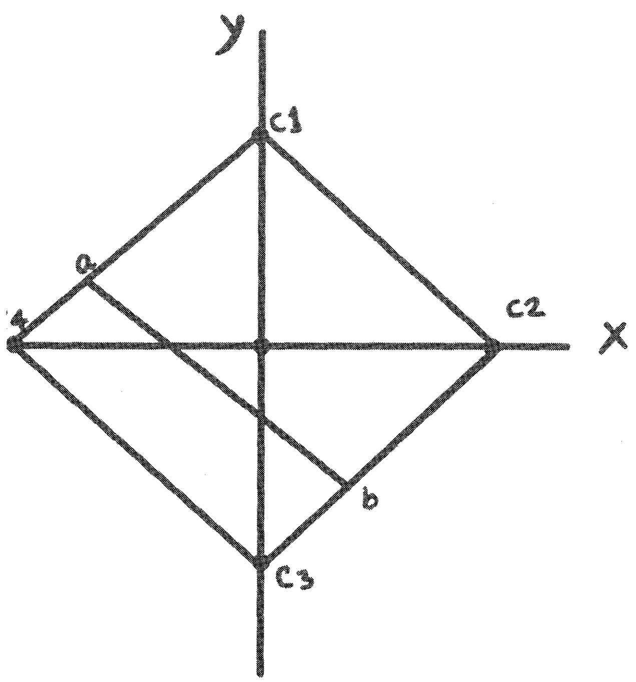
b) Si los costos fijos son de \$10 000, encuentre el costo total de producir 50 unidades.

c) Use el resultado de las partes a) y b) y diferenciales para aproximar el costo total de producir 52 unidades.

R. a) \$150 por unidad.
b) \$15 000.
c) \$15 300.

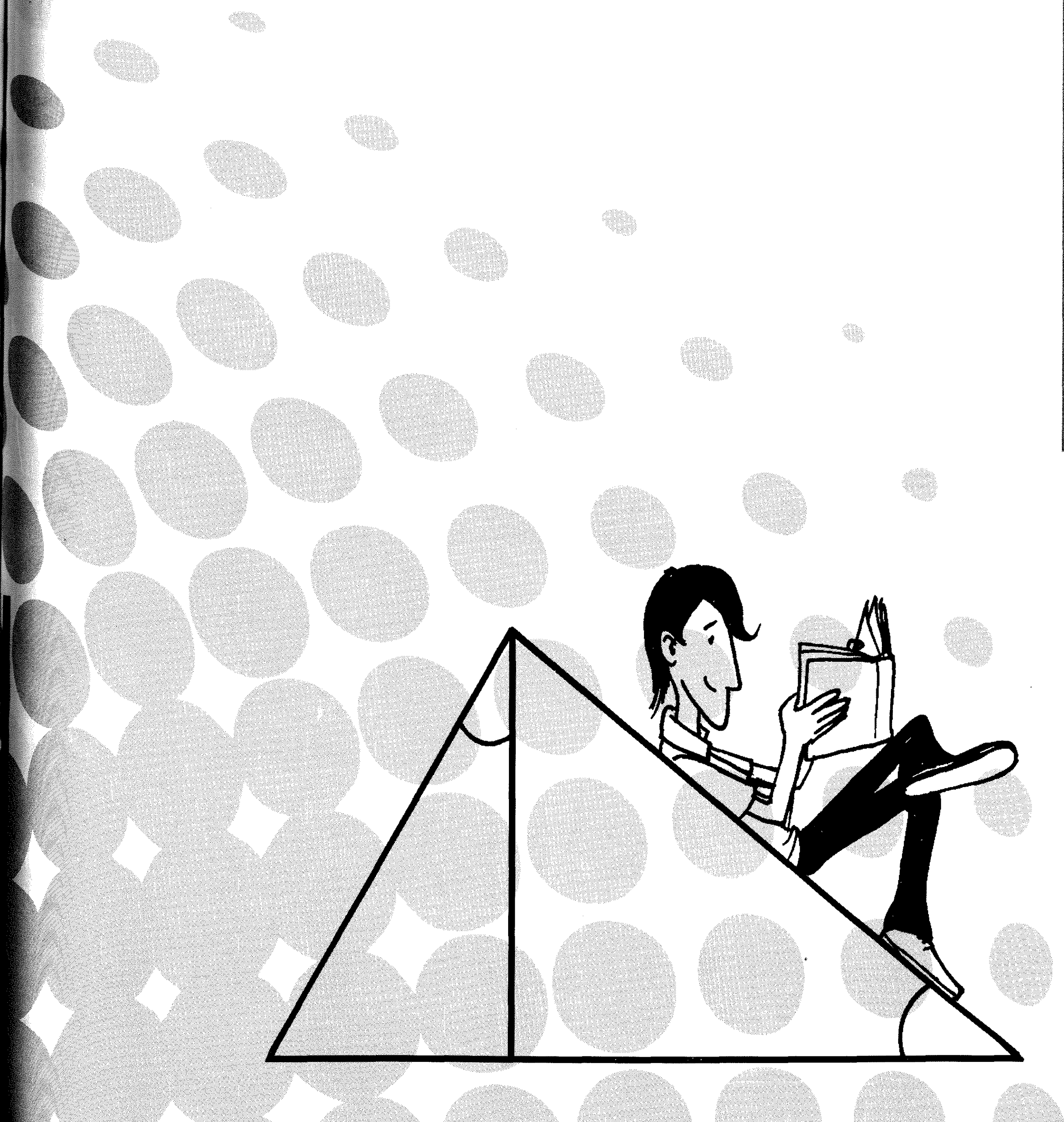
26. Una ciudad pequeña decide efectuar una colecta para comprar un camión de bomberos que cuesta \$70 000. La cantidad inicial en la colecta es de \$10 000. Con base en las colectas anteriores, se determinó que t meses después del inicio de la colecta, la razón $\frac{dx}{dt}$ con que se recibe el dinero es proporcional a la diferencia entre la cantidad deseada y la cantidad total x en el fondo en ese momento. Después de un mes se tienen \$40 000. ¿Con cuánto se contará al cabo de tres meses?

R. \$62 500.

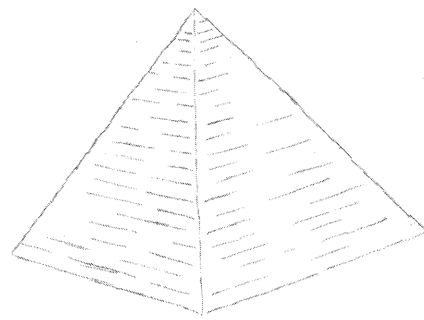


UNIDAD VII

Introducción a la Geometría Analítica

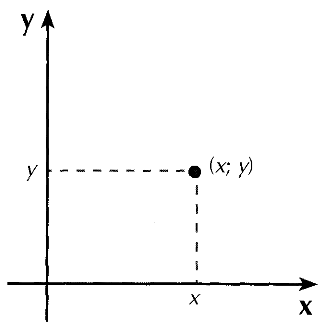


Capítulo 18
PUNTOS EN EL PLANO



18.1 Representación de un punto

Un punto en el plano cartesiano se representa como un par ordenado. El primer componente del par es la coordenada x, y el segundo componente es la coordenada y.



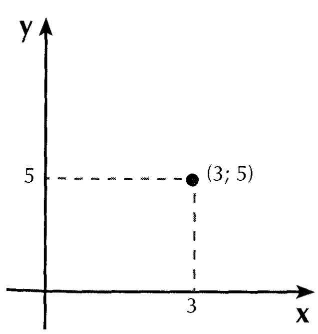
En un plano cartesiano, un par ordenado representa uno y solamente un punto. Por ello, si se representa un mismo punto mediante dos pares ordenados, necesariamente las coordenadas de estos pares son iguales.

> En un plano cartesiano, dos puntos superpuestos tienen las mismas coordenadas.

Si $(a; b) = (c; d)$, entonces necesariamente se debe cumplir que $a = c$ y $b = d$.

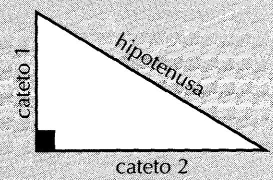
Ejemplos:

1. $(x; y) = (3; 5)$



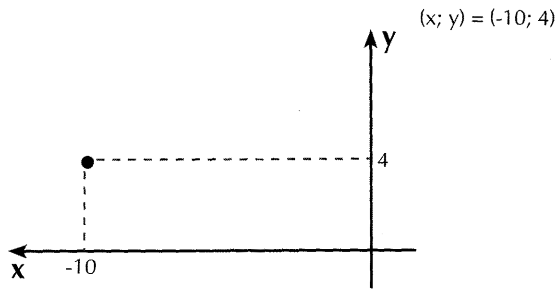
2. Ubicar la posición en el plano del punto (-10; 4).

Triángulo rectángulo



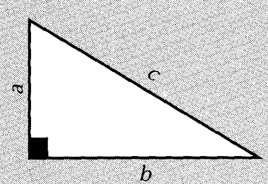
Solución:

Dibujaremos el plano XY:

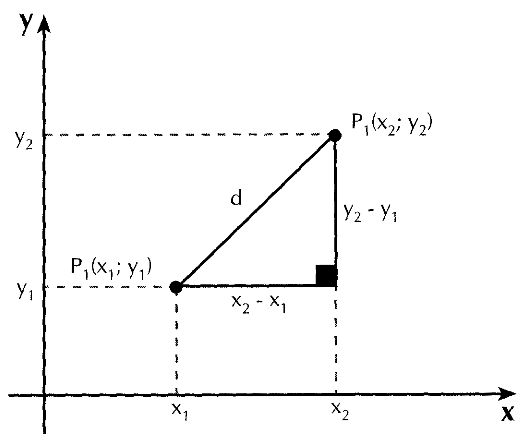


18.2 Distancia entre dos puntos

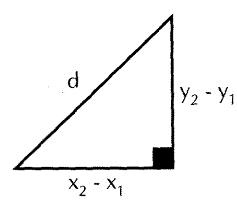
Teorema de Pitágoras:



$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$



Observe que se ha creado un triángulo rectángulo:



La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

En este triángulo, podemos aplicar el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

De donde obtenemos que

$$d = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

No vaya a cometer el siguiente error:

$$\left(\sqrt{c}\right)^2 \Rightarrow \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2$$

$$c \Rightarrow a + b$$

Ejemplos:

1. Hallar la distancia entre los puntos (-2; 3) y (5; 1).

Solución:

Reemplazamos los datos en la fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$\sqrt{(5+2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$$

2. Hallar la distancia entre los puntos (6; -1) y (-4; -3).

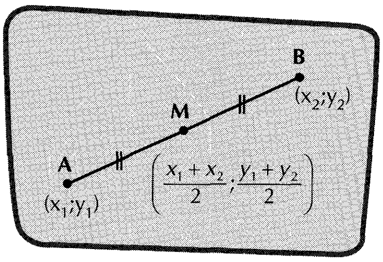
Solución:

Reemplazamos los datos en la fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$\sqrt{(6-(4))^2 + (-1-(-3))^2} = \sqrt{10^2 + 2^2} = \sqrt{104}$$
$$= 2\sqrt{21}$$

18.3 Punto medio de un segmento

Las coordenadas del punto medio de un segmento se calculan sacando el promedio aritmético de las coordenadas respectivas de los puntos extremos.



Dado un segmento AB, donde $A = (x_1; y_1)$ y $B = (x_2; y_2)$, las coordenadas del punto medio $(x_m; y_m)$ serán:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{e} \quad y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

El punto medio será:

$$M = \left(\frac{x \ + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Ejemplos:

1. Hallar el punto medio de $R(13; 15)$ y $D(17; 25)$.

Solución:

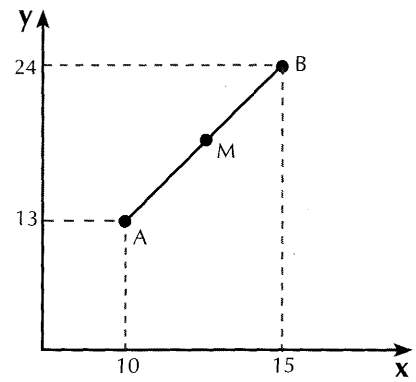
Sea M el punto medio:

$$M = \frac{R+D}{2} \Rightarrow Mx = \frac{Rx + Dx}{2} = \frac{13+17}{2} = 15$$
$$\Rightarrow My = \frac{Ry + Dy}{2} = \frac{15+25}{2} = 20$$

El punto medio M será (15; 20).

2. Sean los puntos $A(10; 13)$ y $B(15; 24)$ las coordenadas de la ubicación de los extremos de una cuerda. Hallar la coordenada del punto medio.

Solución:



Las coordenadas del punto medio vienen dadas por

$$M = \frac{A+B}{2} \quad \begin{cases} \Rightarrow Mx = \dfrac{Ax+Bx}{2} \Rightarrow \dfrac{10+15}{2} = \dfrac{25}{2} \\[2ex] \Rightarrow My = \dfrac{Ay+By}{2} \Rightarrow \dfrac{13+24}{2} = \dfrac{37}{2} \end{cases}$$

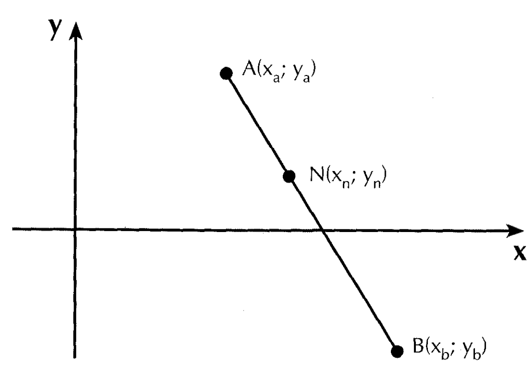
El punto medio M será $\left(\dfrac{25}{2}; \dfrac{37}{2}\right)$

18.4 División proporcional de un segmento

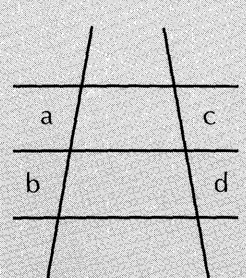
En los ejemplos anteriores, hemos visto cómo un punto puede dividir a un segmento en dos partes iguales. Ahora veremos que un punto puede dividir a un segmento, también en dos partes, aunque estas no resultan iguales, sino que guardan una relación de proporcionalidad.

Supongamos que queremos dividir el segmento $\overline{AB}$ en dos partes proporcionales a los números p y q. Llamaremos a la proporción $\frac{p}{q}$ y N al punto $(x_n; y_n)$ que divide al segmento.

De tal manera que $\dfrac{\overline{AN}}{\overline{NB}} = \dfrac{p}{q} = r$



Estas fórmulas se deducen a partir del teorema de semejanza de Tales:



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = r$$

Las coordenadas del punto N estarán definidas por la relación:

$$x_n = \frac{x_a + rx_b}{1+r}$$

$$y_n = \frac{y_a + ry_b}{1+r}$$

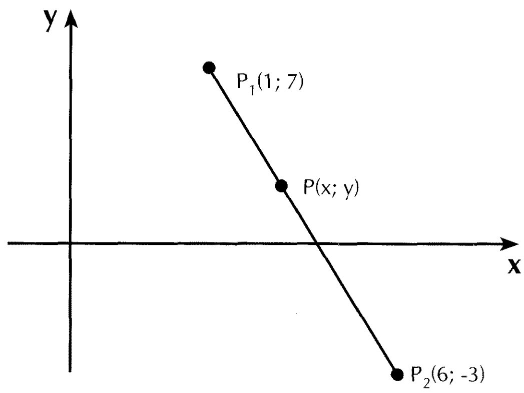
El punto N será:

$$N = \left(\frac{x_a + rx_b}{1+r}; \; \frac{y_a + ry_b}{1+r} \right)$$

Ejemplos:

1. Hallar las coordenadas de un punto $P(x;y)$ que divida al segmento determinado por $P_1(1;7)$ y $P_2(6;-3)$ en la relación $r = 2/3$.

Solución:



Dado que la relación es positiva, P_1P y PP_2 serán del mismo sentido, por lo tanto, el punto $P(x,y)$ estará situado entre los puntos dados, extremos del segmento.

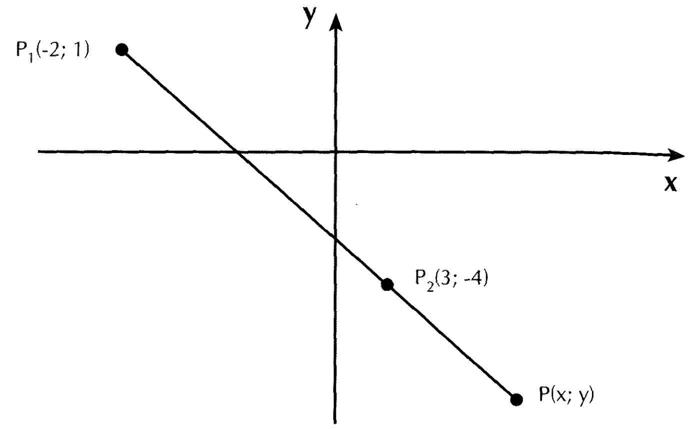
$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{2}{3}$$

$$X = \frac{X_1 + rX_2}{1+r} = \frac{1+\frac{2}{3}(6)}{1+\frac{2}{3}} = 3 \qquad Y = \frac{Y_1 + rY_2}{1+r} = \frac{7+\frac{2}{3}(-3)}{1+\frac{2}{3}} = 3$$

El punto P será (3; 3).

2. Hallar las coordenadas de un punto $P(x;y)$ que divida al segmento determinado por $P_1(-2;1)$ y $P_2(3;-4)$ en la relación $r = -8/3$.

Solución:



Dado que la relación es negativa, $\overline{P_1P}$ y $\overline{PP_2}$ serán del sentido opuesto; por lo tanto, el punto $P(x;y)$ estará situado al extremo del segmento P_1P_2.

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = -\frac{8}{3}$$

$$X = \frac{X_1 r X_2}{1+r} = \frac{-2\left(-\frac{8}{3}\right)(3)}{1+\left(-\frac{8}{3}\right)} = 6$$

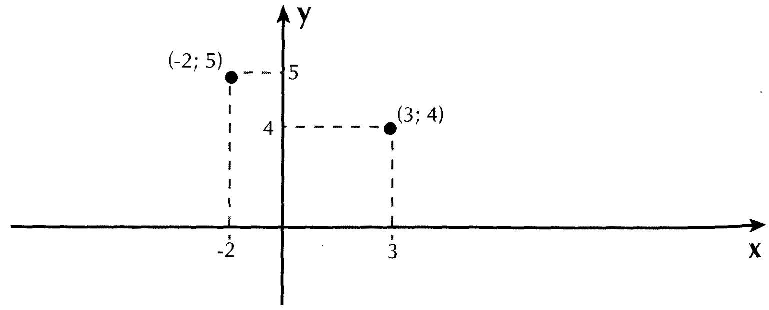
$$Y = \frac{Y_1 + rY_2}{1+r} = \frac{1+\left(-\frac{8}{3}\right)(4)}{1+\left(-\frac{8}{3}\right)} = -7$$

El punto P será (6; -7).

Ejercicios resueltos

1. Ubicar los puntos (3; 4) y (-2; 5).

Solución:

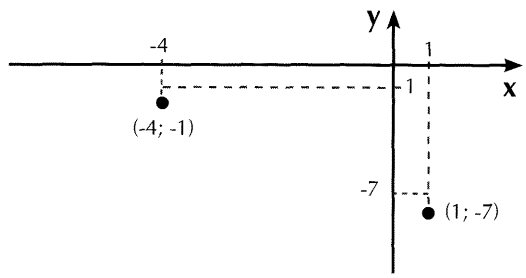


Recuerde:

Si A = B, *entonces*
$(a_1 ; a_2) = (b_1 ; b_2)$
$\Rightarrow a_1 = b_1$
$a_2 = b_2$

2. Ubicar los puntos (-4; -1) y (1; -7).

Solución:



3. Hallar los valores de x e y para (4; 2x - 10) = (x - 1; y + 2).

Solución:

Igualando las componentes, tenemos:
$4 = x - 1$ y $2x - 10 = y + 2$ ....(I)
Si $4 = x - 1$, entonces $x = 5$.
Ahora reemplazamos el valor de x en la ecuación (I):
$2(5) - 10 = y + 2$
$0 = y + 2$ (-2)
$y = -2$

4. Hallar la distancia entre los puntos $P(-2; 3)$ y $Q(5; 1)$.

Solución:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5+2)^2 + (1-3)^2}$$
$$= \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$$

5. Hallar la distancia entre los puntos:
$A(a + 1; b)$ y $B(a - 8; b - 9)$.

Solución:

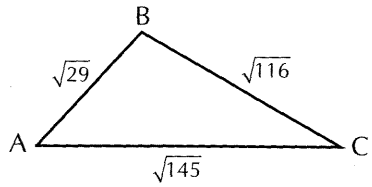
$$d = \sqrt{(a+1-(a-8)^2 + (b-(b-9))^2}$$
$$= \sqrt{(9)^2 + (9)^2} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$$

6. Demostrar que los puntos $A(7; 5)$, $B(2; 3)$ y $C(6; -7)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

Solución:

$$AB = \sqrt{(7-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{29}$$
$$BC = \sqrt{(2-6)^2 + (3+7)} = \sqrt{116}$$

$$AC=\sqrt{(7-6)^2+(5+7)^2}=\sqrt{145}$$



$$\left(\sqrt{145}\right)^2=\left(\sqrt{29}\right)^2+\left(\sqrt{116}\right)^2$$

$145 = 29 + 116$, si cumple.

Como $AB^2 + BC^2 = CD^2$-ABC es un triángulo rectángulo.

7. Hallar el punto medio del segmento que une los puntos $A(3/2; 5/2)$ y $B(-7/2; 9/2)$.

Solución:

Sea M el punto medio de A y B:

$$\Rightarrow Mx=\frac{Ax+Bx}{2}=\frac{\frac{5}{2}-\frac{7}{2}}{2}=\frac{-\frac{4}{2}}{2}=-1$$

$$\Rightarrow My=\frac{Ay+By}{2}=\frac{\frac{5}{2}+\frac{9}{2}}{2}=\frac{\frac{14}{2}}{2}=\frac{7}{2}$$

El punto medio será $\left(-1;\ \frac{7}{2}\right)$

8. Hallar el punto medio de los puntos $A(-2; 6)$ y $B(3; -4)$.

Solución:

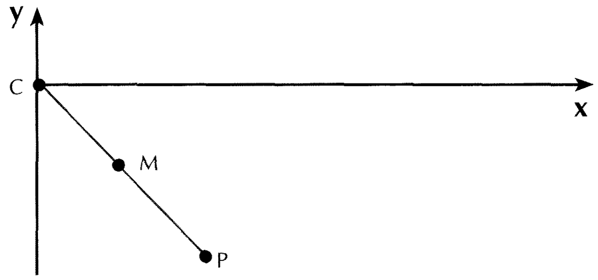
$$\Rightarrow Mx=\frac{Ax+Bx}{2}=\frac{-2+3}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow My=\frac{Ay+By}{2}=\frac{6-4}{2}=\frac{2}{2}=1$$

El punto medio será $\left(\frac{1}{2}:\ 1\right)$

9. Hallar las coordenadas de un punto situado simétricamente entre el punto $P(5; -2)$ y el origen de coordenadas.

Solución:



Siendo el punto $C(0;0)$ el origen de coordenadas, tenemos:

$$M = \frac{C+P}{2}$$

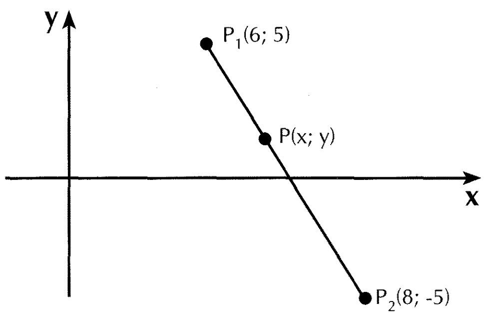
$$\Rightarrow Mx = \frac{Cx+Px}{2} = \frac{0+5}{2} = 5/2$$

$$\Rightarrow My = \frac{Cy+Py}{2} = \frac{0-2}{2} = -1$$

Entonces el punto medio de CP es $\left(\frac{5}{2};\ -1\right)$

10. Hallar las coordenadas de un punto $P(x;y)$ que divida al segmento determinado por $P_1(6; 5)$ y $P_2(8; -5)$ en la relación $r = 3/4$.

Solución:



Dado que la relación es positiva, $\overline{P_1P}$ y $\overline{PP_2}$ serán del mismo sentido; por lo tanto, el punto $P(x;y)$ estará situado entre los puntos dados extremos del segmento.

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{3}{4}$$

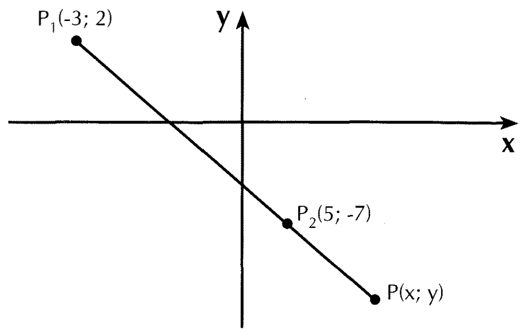
$$X = \frac{X_1 + rX_2}{1+r} = \frac{6+\frac{3}{4}(8)}{1+\frac{3}{4}} = \frac{48}{7}$$

$$Y = \frac{Y_1 + rY_2}{1+r} = \frac{5+\frac{3}{4}(-5)}{1+\frac{3}{4}} = \frac{5}{7}$$

El punto P será $(48/7; 5/7)$.

11. Hallar las coordenadas de un punto $P(x; y)$ que divida al segmento determinado por $P_1(-3; 2)$ y $P_2(5; -7)$ en la relación $r = -7/4$.

Solución:



Dado que la relación es negativa, P_1P y PP_2 serán del sentido opuesto; por lo tanto, el punto $P(x; y)$ estará situado al extremo del segmento P_1P_2.

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = -\frac{7}{4}$$

$$X = \frac{X_1 + rX_2}{1+r} = \frac{-3+\left(-\frac{7}{4}\right)(5)}{1+\left(-\frac{7}{4}\right)} = \frac{47}{3}$$

$$Y = \frac{Y_1 + rY_2}{1+r} = \frac{2+\left(-\frac{7}{4}\right)(-7)}{1+\left(-\frac{7}{4}\right)} = -19$$

El punto P será (47/3; -19).

12. Hallar las coordenadas de un punto $P(x; y)$ que divida al segmento determinado por $P_1(-12; 3)$ y $P_2(-2; 4)$ en la relación $r = 2/5$.

Solución:

Dado que la relación es positiva, $\overline{P_1P}$ y $\overline{PP_2}$ serán del mismo sentido; por lo tanto, el punto $P(x; y)$ estará situado entre los puntos dados extremos del segmento.

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{2}{5}$$

$$X = \frac{X_1 + rX_2}{1+r} = \frac{-12+\frac{2}{5}(-2)}{1+\frac{2}{5}} = \frac{\frac{-64}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{-64}{7}$$

$$Y = \frac{Y_1 + rY_2}{1+r} = \frac{3+\frac{2}{5}(4)}{1+\frac{2}{5}} = \frac{\frac{-23}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{23}{7}$$

El punto P será (-64/7: 23/7)

Ejercicios propuestos

Estos ejercicios son para aplicación directa de la teoría.

Ponga empeño, pues estos ejercicios son la base de los temas que vienen.

1. Hallar los valores de x e y para $(y - 2, 2x + 1) = (x - 1, y + 2)$.

   R. $x = 2; y = 3$

2. Determinar los valores de x e y:

   $$\left(\frac{x+y}{2}-1;\ \frac{x-y}{2}+1\right)=\left(\frac{y-x}{2}+2;\ \frac{x+y}{2}-2\right)$$

   R. $x = 3; y = 3$

3. Demostrar que los puntos A (3; 8), B (-11; 3) y C (-8; -2) son los vértices de un triángulo isósceles.

4. La ordenada de un punto es 8 y su distancia al punto B(5; -2) es $2\sqrt{41}$. Hallar la abscisa del punto.

   R. $x_1 = 13$ o $x_2 = -3$

5. Hallar las coordenadas de un punto situado simétricamente entre el punto P(-10; -5) y el origen de las coordenadas.

   R. $\left(-5,-\frac{5}{2}\right)$

6. Hallar el punto medio del segmento que resulta de la unión de los puntos medios de los segmentos AB y CD, siendo A(3; 2), B(12; 8), C(-6; -4) y D(-9; -4).

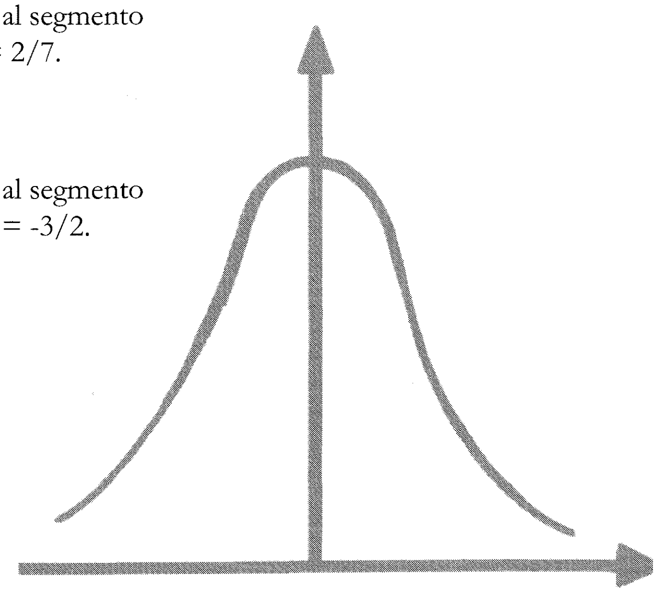
   R. $\left(0;\frac{1}{2}\right)$

7. Hallar las coordenadas de un punto $P(x; y)$ que divida al segmento determinado por P_1(-4; 6) y P_2(3; -4) en la relación $r = 2/7$.

   R. (-22/9; 34/9)

8. Hallar las coordenadas de un punto $P(x; y)$ que divida al segmento determinado por P_1(-6; -1) y P_2(-3; -2) en la relación $r = -3/2$.

   R. (3; -4)

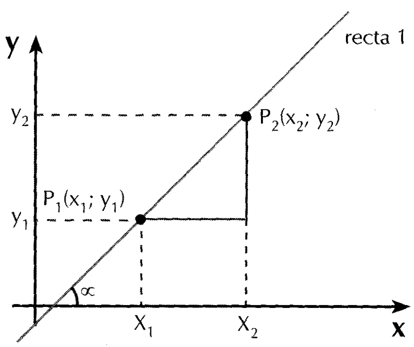


Capítulo 19
RECTAS EN EL PLANO

Sabemos que un segmento es la línea más corta que une dos puntos. Si prolongamos indefinidamente el segmento en ambas direcciones, obtendremos una recta. También podemos definir a la recta como la intersección de dos planos.

19.1 Pendiente de una recta

La pendiente de una recta es la relación que existe entre su variación en el eje y y su variación en el eje x. Hemos trabajado ya con dichas variaciones cuando vimos la distancia entre dos puntos.



Para calcular la pendiente de una recta, tomamos dos puntos cualesquiera P_1 y P_2. La variación en el eje y será $(y_2 - y_1)$, mientras que en el eje x será $(x_2 - x_1)$.

La pendiente de la recta L está dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

También podemos definir la pendiente como la tangente del ángulo formado por la recta con el semieje x positivo. Así, tenemos:

$$tg \propto = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Al ángulo $\propto$ se le conoce como *inclinación de la recta.* Si queremos hallarlo, debemos buscar un ángulo cuya tangente sea $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Así, el ángulo $\propto$ será:

$\propto = arc\ tag\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$. Esto se lee *arco* (es decir, ángulo), cuya tangente es $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Este procedimiento puede resultar repetitivo, pues no hemos hecho más que cambiar la manera de formular la pregunta acerca de cuál es justamente el ángulo $\propto$. Sin embargo, si introducimos esa función en una calculadora, nos dará el resultado.

En la calculadora, la función inversa de la tangente aparece como *tan*$^{-1}$*a*.

Esta notación es confusa, pues podría parecer que para hallar el ángulo a hay que elevar *tan* a la -1, lo cual es falso.

Ejemplos:

1. Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos (10; 5) y (9; -11).

   Solución :

   El cálculo de la pendiente de la recta viene dado por la siguiente fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

   Reemplazando datos, tenemos:

$$m = \frac{10 - 9}{5 - (-11)} = \frac{1}{16}$$

2. Hallar la inclinación de la recta que pasa por los puntos (23; 15) y (25; 13).

   Solución:

   El cálculo de la pendiente de la recta viene dado por la siguiente fórmula:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

   Reemplazando datos, tenemos:

$$tg\theta = \frac{13 - 15}{25 - 23} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \rightarrow \quad \theta = arctg(1/16)$$

   Aplicando esta función en la calculadora, tendremos que

$$\theta = 3{,}58°.$$

En este ejemplo, nos piden la inclinación (que es un ángulo) y no la pendiente (que es tangente del ángulo).

En una relación lineal, el exponente de las variables es 1.

19.2 Ecuaciones de la recta

Para conocer una recta determinada, necesitamos saber por lo menos dos puntos por los que pasa, o un punto y la pendiente. Vamos a estudiar rectas en el plano xy. Estas estarán determinadas, por lo tanto, por una relación lineal entre los valores de x y los valores de y. Esta relación estará expresada mediante una ecuación a la que llamaremos *ecuación de la recta.*

19.2.1 Ecuación punto-pendiente

Para este tema, debe repasar lo que vimos en el capítulo 8 sobre sistemas de ecuaciones.

Si conocemos dos puntos por los que pasa la recta, podremos conocer la pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

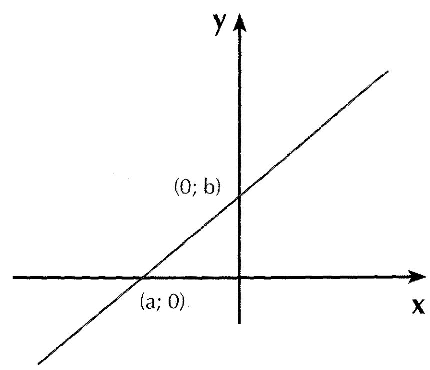
Si $P(x; y)$ es un punto cualquiera de la recta, entonces se cumplirá que $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Esta ecuación se llama ecuación punto-pendiente porque para ella necesitamos un punto de paso (P_1) y la pendiente m.

La ecuación punto-pendiente se puede expresar así:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

Todas las rectas se intersectan con los ejes coordenados. Los puntos de intersección están dados por los pares ordenados $(a; 0)$ y $(0; b)$. Así:



Si tomamos como punto de paso al punto $(0; b)$ y lo reemplazamos en la ecuación de la recta, tendremos:

$$y - b = m\,(x - 0) \qquad (+b)$$

Si despejamos, nos queda:

$$\boxed{y = mx + b}$$

A esta ecuación se le llama *ecuación pendiente-punto de paso en el origen.*

19.2.2 Ecuación general

Partamos nuevamente de la ecuación punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Si resolvemos el paréntesis, tendremos:

$$y - y_1 = mx - mx_1; \qquad (-y + y_1)$$

Podemos igualar la expresión a cero, llevando los términos al segundo miembro:

$$0 = mx - y + y_1 - mx_1$$

Cambiemos los valores constantes por las letras A, B y C:

$A = m$

$B = -1$

$C = y_1 - mx_1$

De esta manera, obtenemos la ecuación general de la recta:

$$0 = Ax + By + C$$

Ejemplos:

1. Se desea conocer la ecuación general de la recta que pasa por los puntos (10; 6) y (15; 9).

   Solución:

   La ecuación general de la recta:

   $Ax + By + C = 0$..($\propto$)

   Dado que ambos puntos pertenecen a la misma recta, deben cumplir con la misma relación de puntos de la ecuación de la recta expresada de la forma:

   $y = mx + b \rightarrow$ donde $m = -\dfrac{A}{B}$; $\quad b = -\dfrac{C}{B}$

   Entonces

   $9 = m \bullet 15 + b$ ....(I) $\qquad$ y $\qquad 6 = m \bullet 10 + b$ ....(II)

   Resolviendo el sistema: $m = \dfrac{3}{5}$ y $b = 0$

   Por lo tanto, tenemos la ecuación de la recta:

   $y = \dfrac{3}{5}x \quad \rightarrow \quad 5y = 3x$ que de la forma general es $5y - 3x = 0$.

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (10; 12) y, además, posee una pendiente de 2,5 (ecuación punto-pendiente y general).

   Solución:

   Solicitan la ecuación de la recta $y = mx + b$, entonces reemplazando la pendiente y el punto de paso, tenemos:

$12 = 2{,}5\ (10) + b \qquad 12 = 25 + b \qquad (-25)$

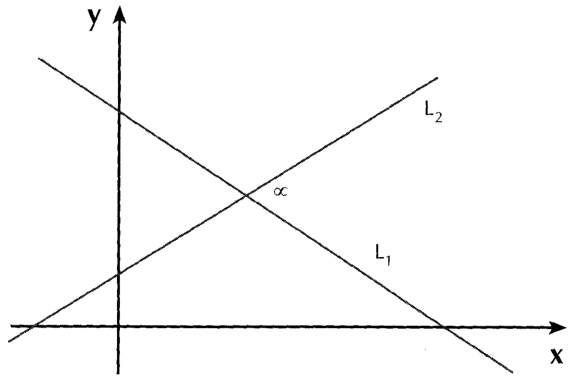
$-13 = b$

Por lo tanto, $y = mx + b$ será $y = 2{,}5 \times 13$ ....(I)

La ecuación general será $10y - 25x + 130 = 0$.

19.3 Ángulo de intersección de dos rectas

El ángulo de intersección entre dos rectas está dado por la siguiente fórmula:



$$\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

Esta fórmula se obtiene a partir de la fórmula de la tangente de una diferencia:

$$tg(a - b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga \cdot tgb}$$

Ejemplos:

1. Conociendo que el ángulo entre dos rectas l_1 y l_2 es 45°, y que la pendiente de l_1 es 2/3, hállese la pendiente de l_2.

   Solución:

   Sabemos que el ángulo entre dos rectas viene dado por

   $tg\ \alpha = \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$, por tanto, sustituyendo datos:

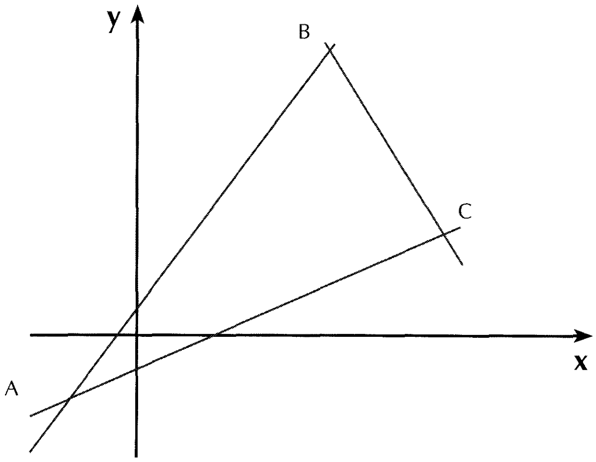
   $$tg45° = \frac{m_2 - 2/3}{1 + m_2(2/3)} \rightarrow 1 = \frac{m_2 2/3}{1 + \frac{2m_2}{3}}$$

   $$1 = \frac{\frac{3m_2 - 2}{3}}{\frac{3 + 2m_2}{3}} \rightarrow 1 = \frac{3m_2 - 2}{3 + 2m_2} \rightarrow 3 + 2m_2 = 3m_2 - 2$$

   Finalmente $m_2 = 5$.

2. Hallar los ángulos interiores de un triángulo cuyos vértices son las coordenadas $A = (-3; -2)$, $B = (2; 5)$ y $C = (4; 2)$.

Solución:



Reemplazamos en la fórmula $tg\theta = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para calcular las pendientes de cada recta:

$$m_{AB} = \frac{5+2}{2+3} = 7/5; \; m_{BC} = \frac{2-5}{4-2} = -3/2; \; m_{CA} = \frac{2+2}{4+3} = 4/7$$

Ahora emplearemos la siguiente fórmula:

$$tg\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

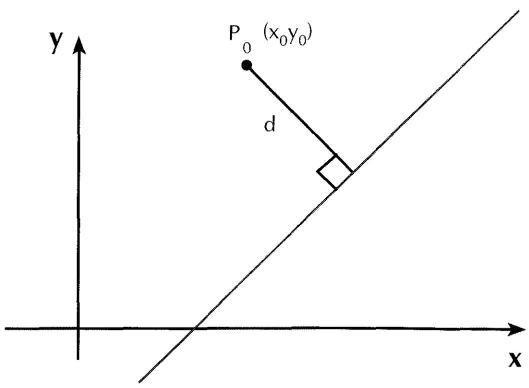
$$tgA = \frac{m_{\overline{AB}} - m_{\overline{CA}}}{1 + m_{\overline{AB}} m_{\overline{CA}}} = \frac{7/5 - 4/7}{1 + (7/5)(4/7)} = 29/63 \rightarrow A = 24{,}7^\circ$$

$$tgB = \frac{m_{\overline{BC}} - m_{\overline{AB}}}{1 + m_{\overline{BC}} m_{\overline{AB}}} = \frac{-3/2 - 7/5}{1 + (-3/2)(7/5)} = 29/11 \rightarrow A = 69{,}2^\circ$$

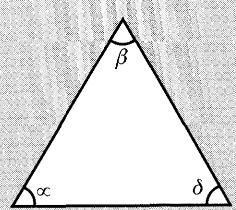
$$tgC = \frac{m_{\overline{CA}} - m_{\overline{BC}}}{1 + m_{\overline{CA}} m_{\overline{BC}}} = \frac{4/7 - (-3/2)}{1 + (4/7)(-3/2)} = 29/2 \rightarrow A = 86{,}1^\circ$$

19.4 Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto a una recta es el segmento perpendicular a la recta cuyo extremo coincide con dicho punto.



También podemos calcular el tercer ángulo tomando en cuenta que los ángulos internos de un triángulo suman 180°.



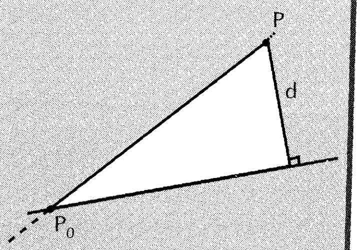
$\alpha + \beta + \delta = 180°$

Si tenemos un punto P_0 y una recta expresada en su forma general $Ax + By + C = 0$, la distancia d estará dada por la siguiente expresión:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

El valor absoluto del numerador y la raíz cuadrada del denominador indican que la distancia será siempre positiva.

Ensaye una demostración para la fórmula de la distancia de un punto a una recta.



Tome un punto cualquiera de la recta.

Puede calcular la distancia entre los puntos y el ángulo entre las rectas.

Ejemplos:

1. Hallar la distancia del punto (5; 10) a la recta $y = 0{,}5x + 6$.

   Solución:

   Para hallar la distancia del punto a la recta, necesitamos la fórmula $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, donde $(x_0; y_0)$ es la coordenada del punto desde donde se desea conocer la distancia a la recta $Ax + By + C = 0$

   La ecuación de nuestra recta debe ser de la forma general, por lo que tendremos que transformar la ecuación punto pendiente.

   Así, $y = 0{,}5x + 6 \longrightarrow y - 0{,}5x - 6 = 0$; $A = 1$; $B = -0{,}5$; $C = -6$ y el punto es (5; 10), en la fórmula.

$$d = \frac{|1(5) + -0{,}5(10) + -5|}{\sqrt{1^2 + (-0{,}5)^2}} = \frac{6}{\sqrt{1{,}25}} = 5{,}367$$

2. Hallar la distancia desde el origen a la recta que pasa por los puntos (20; 40) y (25; 45).

   Solución:

   Definiremos la recta: dados dos puntos, la calcularemos de la forma punto-pendiente.

$$y = mx + b \qquad 40 = m\bullet 20 + b \text{ y } 45 = m\bullet 25 + b$$

   Resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$m = -1 \text{ y } b = 65\text{; por ende, } y = -x + 65$$

   Expresado de la manera general, es $y + x - 65 = 0$.

   Identificamos términos y sustituimos en $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$$d = \frac{|1(0) + 1(0) + -65|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{65}{\sqrt{2}} = 65\frac{\sqrt{2}}{2} = 32{,}5\sqrt{2}$$

Ejercicios resueltos

1. Sea la recta que pasa por $A = (10; 15)$ y por $B = (12; 50)$ y la recta que pasa por $C = (20; 30)$ y $D = (25; 40)$, indique cuál de estas posee mayor crecimiento y a cuánto equivale este.

Solución:

Consideremos la recta AB y su pendiente:

$$tg\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_1} \rightarrow tg\theta = \frac{50-15}{12-10} = \frac{35}{2} = 17{,}5 \rightarrow \theta = arctg(17{,}5)$$

Consideremos ahora la recta CD y su pendiente:

$$tg\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow tg\theta = \frac{40-30}{25-20} = \frac{10}{5} = 2 \rightarrow \theta = arctg(2)$$

La recta AB posee mayor crecimiento, su velocidad de crecimiento es de 17,5.

Sean los siguientes puntos del plano:
$A = (-8; -4)$, $B = (5; 9)$, $C = (-11; 4)$, $D = (-11; 10)$,
$E = (10; -3)$, $F = (14; -7)$, $G = (8; 6)$ y $H = (14; 6)$.

2. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación θ de las rectas que unen los puntos AB y CD.

3. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación θ de las rectas que unen los puntos EF y GH. ¿Se puede definir lo solicitado en todos los casos?

Solución 2 y 3:

$$m = tg\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Reemplazamos los puntos AB y CD:

$$AB: tg\theta = \frac{9+4}{5+8} = 1 \rightarrow \theta = 45°$$

$$CD: tg\theta = \frac{-7+3}{14+10} = -1 \rightarrow \theta = 135°$$

$EF: tg\theta = \dfrac{10-4}{-11+11} = \dfrac{6}{0} = \alpha \rightarrow \theta = 90°$, se define por convención, ya que el resultado de esta división no está definido.

$GH: tg\theta = \dfrac{6-6}{14-8} = 0 \rightarrow \theta = 0°$, cuando la pendiente es cero, el ángulo respecto del eje x es cero.

Demostrar que los puntos $A = (-3; 4)$, $B = (3; 2)$ y $C\ (6; 1)$ son colineales.

Solución:

Si A, B y C son colineales, quiere decir que los segmentos dirigidos desde A a B y C deben ser paralelos. Así, tenemos:

pendiente de $\overline{AB}$ pendiente de $\overline{AC}$

$$m_{AB} = \frac{2-4}{3+3} = -\frac{1}{3} \qquad m_{AC} = \frac{1-4}{6+3} = -\frac{1}{3}$$

Como la pendiente de $\overline{AB}$ es la misma que la de $\overline{AC}$, los tres puntos están situados sobre la misma recta.

5. Deducir la ecuación de la recta que pasa por el punto $(x_1;y_1)$ y cuya pendiente es m.

Solución:

Sea $(x;y)$ un punto en general de la recta, podemos afirmar:

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

$\rightarrow$ $mx - mx_1 = y - y_1$. Por lo tanto, $mx + (y_1 - mx_1) = y$

6. Deducir la ecuación de la recta con pendiente m que corte al eje y en b.

Solución:

Un punto de la recta es $(0; b)$. Por la definición de la pendiente, tenemos:

$$m = \frac{y-b}{x-0} \rightarrow mx - m0 = y - b \ \rightarrow\ mx + b = y$$

7. Deducir la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(x_1;y_1)$ y $(x_2;y_2)$.

Solución:

Sea un punto arbitrario y genérico de la recta $(x;y)$, emplearemos la definición de la pendiente. Dado que tenemos dos puntos conocidos, la pendiente será también conocida.

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Empleando el criterio de punto pendiente:

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1}; \text{ pero } m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \rightarrow L: \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x-x_1) = y - y_1$$

8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-2; -3)$ y $(4; 2)$.

Solución:

Bajo el criterio del problema anterior, hallaremos primero la pendiente para después hacer uso del concepto punto pendiente. Sea $(x;y)$ un punto cualquiera de la recta.

La siguiente pendiente: $m=\dfrac{-3-2}{-2-4}=\dfrac{5}{6}$

Ahora, el criterio punto pendiente:

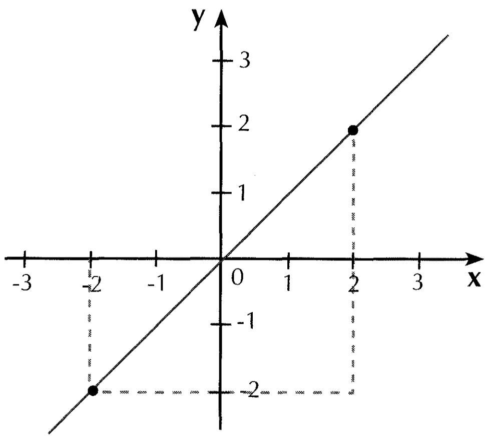
$$\frac{5}{6}=\frac{y+3}{x+2}\rightarrow 5x+10=6y+18 \quad\rightarrow\quad 5x-6y-8=0$$

9. Representar gráficamente la ecuación x - y = 0.

Solución:

Despejando y en términos de x, se obtiene:
x - y = 0 y = x ....(I)

Se tiene a partir de (I) que para x = 0; y = 0; x = 2; y = 2; x = -2; y = -2.

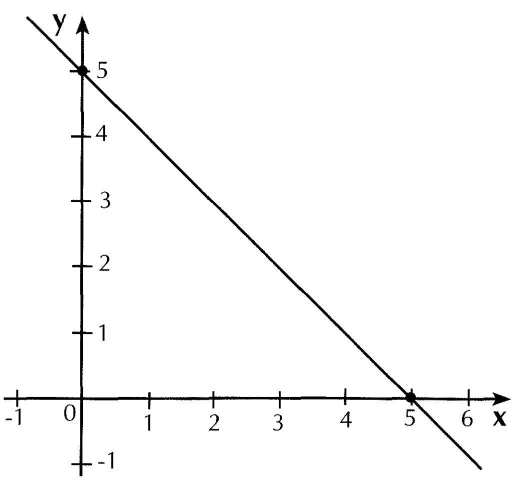


10. Representar gráficamente la ecuación x + y = 0.

Solución:

Despejando y en términos de x, se obtiene:
x + y = 5 → y = 5 - x ....(I)

Se tiene a partir de (I) que para x = 0; y = 5; x = 5; y = 0.



Las ecuaciones de la forma $\boxed{x = a}$ *son representadas por rectas paralelas al eje* y.

11. Representar gráficamente la ecuación $x + 6 = 0$.

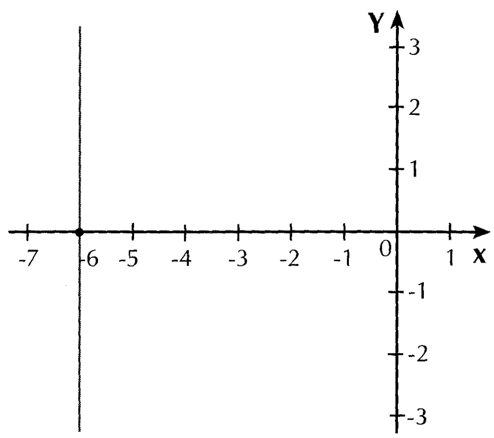
Solución:

Despejando x, se obtiene:

$x + 6 = 0 \rightarrow x = -6$ ....(I)

Se tiene a partir de (I) que para todo y, $x = -6$.

La gráfica es una paralela al eje y.



Las ecuaciones de la forma $\boxed{y = a}$ *son representadas por rectas paralelas al eje* x.

12. Representar gráficamente la ecuación $y - 7 = 0$.

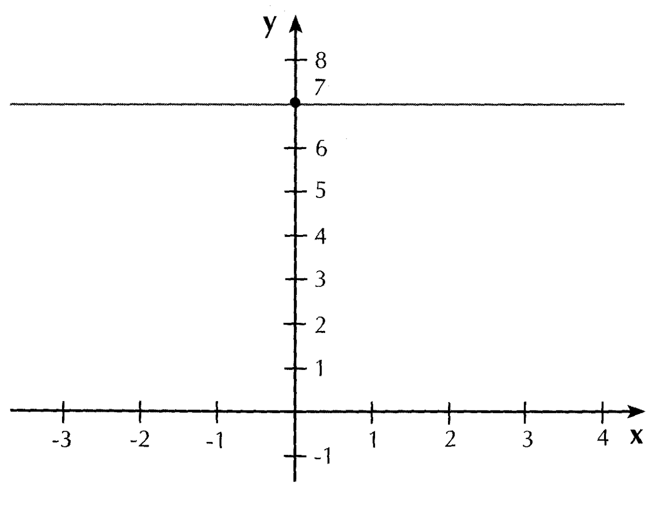
Solución:

Despejando y, se obtiene:

$y - 7 = 0 \quad y = 7$ (1)

Se tiene a partir de (1) que para todo $x, y = -7$.

La gráfica es una paralela al eje x.



13. Halle la intersección de las rectas $x - y = 2$; $3x + y = 18$.

Solución:

Despejando y en función de x en ambas ecuaciones, tenemos que

$x - y = 2 \rightarrow y = x - 2$

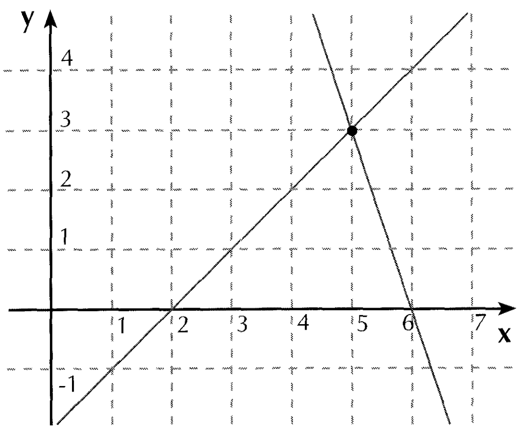
$3x + y = 18 \rightarrow y = 18 - 3x \quad (+3x)$

$x - 2 = 18 - 3x \quad +2$

$4x = 20 \quad \div 4$

$x = 5$

Reemplazamos $y = 5 - 2 = 3$. Intersección (5; 3)



Lo que se pide en este ejercicio es que resuelva un sistema de ecuaciones.

Recuerde lo que vimos en el capítulo correspondiente.

14. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (10; 12) y que además es paralela a la recta que pasa por los puntos (5; 6) y (7; 8).

Solución:

La recta que pasa por (5; 6) y (7; 8) tiene como pendiente:

$$M = \frac{8-6}{7-5} = 1$$

La recta de la cual nos piden hallar su ecuación tiene también como pendiente $M = 1$ (pues son paralelas).

$$y = 1x + b$$

Como pasa por el punto (10; 12), tenemos $12 = 1 \bullet 10 + b$
$2 = b$

La ecuación será:
$y = x + 2$

15. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2; -3) y es perpendicular a la recta $2x - 3y + 6 = 0$.

Solución:

Si dos rectas son perpendiculares, el producto de sus pendientes será -1.

Recuerde:

Si $L_1 \perp L_2$, *entonces* $m_1 \bullet m_2 = -1$

Transformando la ecuación general a ecuación punto pendiente, tenemos:

$2x+6=3y \rightarrow \frac{2}{3}x+2=y$, por lo que su pendiente es 2/3.

Entonces: $m \bullet m = -1 \rightarrow 2/3 \bullet m' = -1 \rightarrow m' = -3/2$

Ahora ya tenemos la pendiente de la recta incógnita y emplearemos el criterio punto de paso pendiente.

Nuestro punto de paso es (2, -3)

Luego, $y = m'x + b \rightarrow y=-\frac{3}{2}x+b \rightarrow -3=-\frac{3}{2}(2)+b \rightarrow b=0$

La recta solicitada es $y=-\frac{3}{2}x$.

Recuerde lo que vimos sobre la división proporcional de un segmento.

16. Hallar la ecuación de la recta de 53° de inclinación que pasa por el punto que divide al segmento conformado por (10; 20) y (30; 40) en razón de 3 a 2.

Solución:

Primero, hallaremos el punto que divide al segmento en dichas proporciones:

$x=\frac{x_0+rx_1}{1+r}$; $y=\frac{y_0+ry_1}{1+r}$, donde P_0 = (10; 20) P_1 = (30; 40)

y $r=3/2 \rightarrow x=\frac{10+(3/2)30}{1+(3/2)}=\frac{55}{2,5}=22$

$\rightarrow y=\frac{20+(3/2)40}{1+(3/2)}=\frac{80}{2,5}=32$

El punto en el que se corta el segmento es (22; 32)

La pendiente de la recta es de 53 $\rightarrow tg53°=\frac{4}{5}=m$.

Por lo tanto, la ecuación de la recta pedida haciendo uso del criterio punto pendiente es como sigue:

$y=\frac{4}{3}x+b \rightarrow 32=\frac{4}{3} \bullet 22+b \rightarrow 96=88+3b \rightarrow 8/3=b.$

$y=\frac{4}{3}x+\frac{8}{3} \rightarrow 3y-4x-8=0$

17. Hallar la distancia del origen a la recta que tiene pendiente 1 y que intercepta al eje y en 23.

Solución:

Al final de este ejercicio, hemos tenido que racionalizar.

Recuerde la fórmula para hallar el punto medio de un segmento.

Si la intersección con el eje y es 23, entonces b = 23. Luego, $y = x + 23$.

La ecuación expresada de manera general es: $x - y - 23 = 0$, identificando coeficientes nos queda A = 1; B = -1; C = -23; el punto (0; 0).

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \rightarrow d=\frac{|1(0)+-1(0)-23|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{23}{\sqrt{2}}=11,5\sqrt{2}$$

18. Halle la distancia desde el punto medio del segmento conformado por (45; 30) y (50; 75) a la recta $y = 12x + 50$.

Solución:

Calculamos el punto medio m del segmento:

$x_m = (45 + 50)/2 = 47{,}5$ y $y_m = (30 + 75)/2 = 52{,}5$

La recta expresada de manera generada es: $-12x + y - 50 = 0$, identificando coeficientes, tenemos: $A = -12$; $B = 1$; $C = -50$.

El punto medio es (47,5; 52;5)

$$d = \frac{|-12(47{,}5) + 1(52{,}5) + -50|}{\sqrt{12^2 + 1^2}} = 47{,}128.$$

Ejercicios propuestos

1. Demostrar, aplicando el concepto de pendiente, que los puntos $A(8; 6)$, $B(4; 8)$ y $C = (2; 4)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

2. Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A = (4; 6)$ y $B = (1; 3)$

   R. $m = 1$

Recuerde revisar la teoría y los ejercicios propuestos.

3. Dado el triángulo $A = (-3; -1)$, $B = (6; 10)$ y $C = (2; 5)$, hallar el lado de mayor pendiente y el de menor pendiente.

   R. El lado de mayor pendiente es BC; el lado de menor pendiente es CA.

4. Deducir la ecuación de la recta cuyos puntos de intersección con los ejes son $(a; 0)$ y $(0; b)$.

   R. $1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$

5. Hallar la pendiente y la ordenada en el origen b de la recta cuya ecuación viene dada en la forma general $Ax + By + C = 0$.

   R. $m = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$

6. Hallar la pendiente y la ordenada en el origen b de la recta $2y + 3x = 7$.

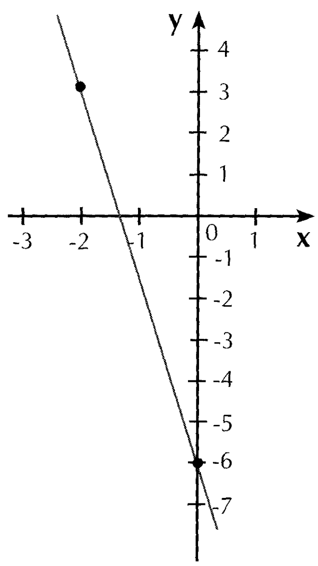
   R. $m = -3/2$; $b = 7/2$

7. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2; -3) y es paralela a la recta que une los puntos (4; 1) y (-2; 2).

R. $6y + x + 16 = 0$

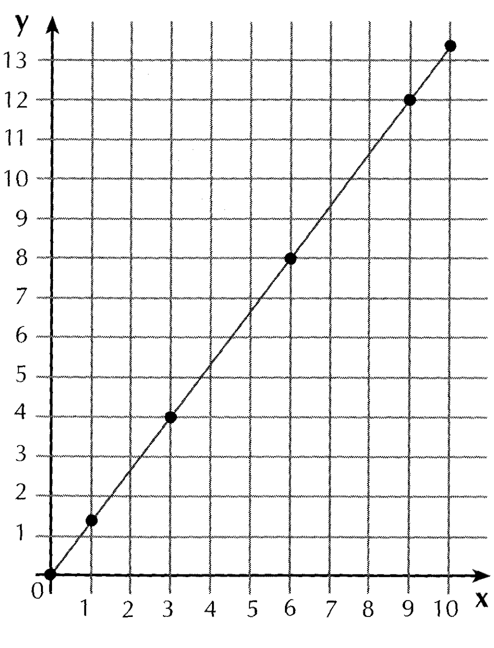
8. Graficar $9x + 2y = -12$.

R.



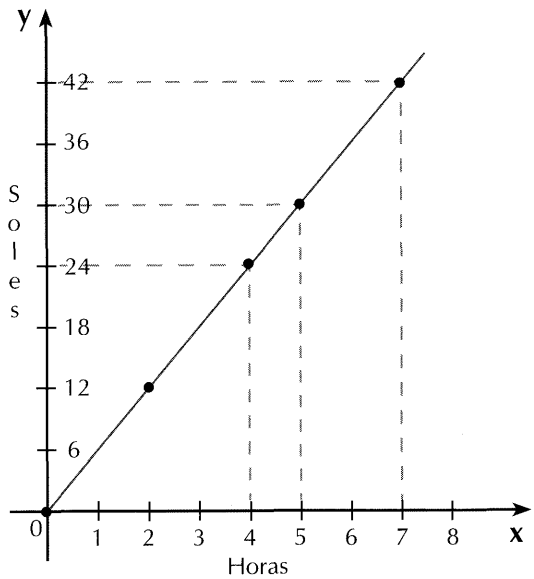
9. Construir la gráfica que permita hallar el costo de cualquier número de metros de tela sabiendo que 3 m cuestan $4.

R.



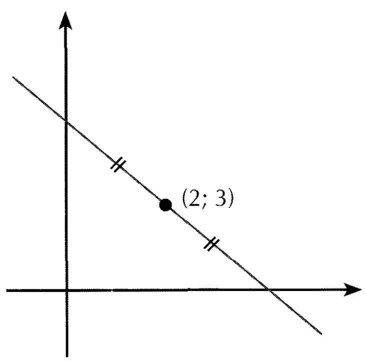
10. Por cada 3 horas de trabajo, un hombre recibe un salario de 18 soles. Halle mediante el uso de gráficos el salario de 4 horas, 5 horas y 7 horas.

R.



El salario de 4 horas es de 24 soles, el de 5 horas de 30 soles, y el de 7 horas de 42 soles.

11. El punto (2; 3) biseca la porción de una recta comprendida entre los ejes coordenados. Encontrar una ecuación de la recta.



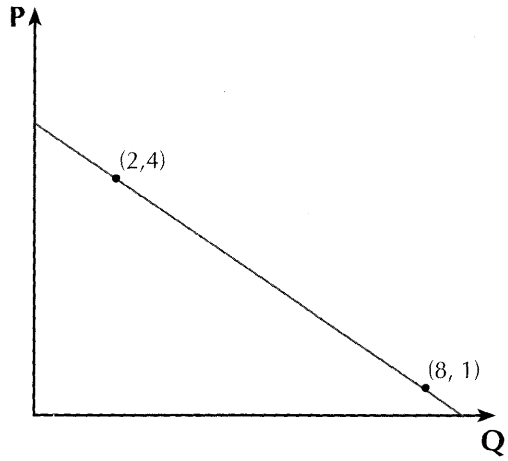
R. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$

12. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (4; -2) y distan 2 unidades del origen.

R. Las posibles ecuaciones son:

$y = -2;\ 4x + 3y = 16$

13. La recta de la figura muestra la relación entre el precio p de un artículo (en dólares) y la cantidad q de artículos (en miles), que los consumidores comprarán a ese precio. Determinar la pendiente.



R. $-\frac{1}{2}$

14. Suponga que el costo para producir 10 unidades de un producto es $40 y el costo para 20 unidades es $70. Si el costo, c, está relacionado de manera lineal con la producción, q, determine el costo de producir 35 unidades.

R. $115

15. Suponga que los clientes demandarán 40 unidades de un producto cuando el precio es de $12 por unidad, y 25 unidades cuando el precio es de $18 cada una. Halle la ecuación de la demanda, suponiendo que es lineal. Determine el precio por unidad cuando se requieran 30 unidades.

R. $16

16. En 1988, las acciones de una compañía se cotizaron en $30 cada una. En 1998, la compañía empezó a tener problemas y el precio de las acciones cayó a $10 por acción. Calcule el valor de la pendiente de la recta que describe la relación entre el precio por acción y el año en que se comerció, con años en el eje x y el precio en el eje y. Encuentre una interpretación para dicha pendiente.

R. -2; el precio de la acción cae en promedio de $2 por año.

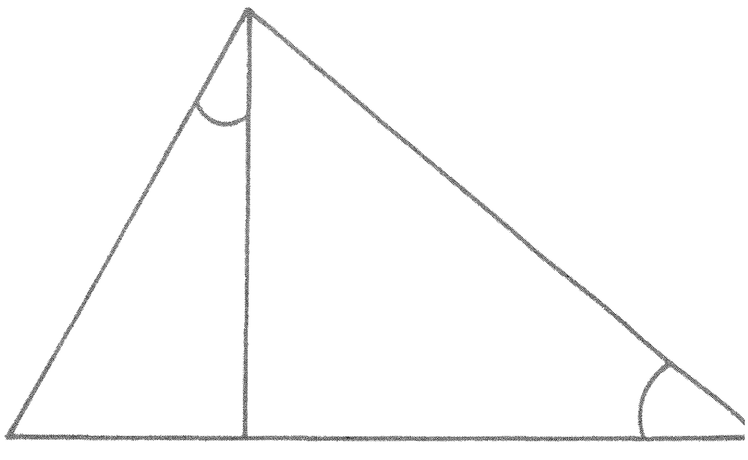
17. Un nuevo edificio se vendió por $960 000 cinco años después de que se compró. Los propietarios originales calcularon que el edificio se depreciaba $45 000 por año, mientras ellos fuesen

los propietarios. Determine una función lineal que describa la apreciación del edificio, si x es el número de años desde la compra original.

R. $f(x) = 45000x + 735000$

18. Una compañía cobra por un servicio una cantidad fija más una tarifa por hora. Si un cliente tiene una factura de \$150 por un servicio de una hora y \$280 por un servicio de tres horas, determine una función lineal que describa el precio de un servicio, en donde x es el número de horas de servicio.

R. $f(x) = 65x + 85$



Capítulo 20
CÓNICAS EN EL PLANO

Todos los subcapítulos de esta sección tienen el mismo esquema. Así, podrá realizar la comparación de las diferentes figuras que vamos a estudiar.

Una cónica es una línea curva que pertenece a un plano. En este capítulo, vamos a estudiar cónicas sobre el plano xy. Por ello, los puntos que pertenezcan a estas figuras estarán dados por relaciones entre la coordenada x y la coordenada y. A la relación entre estas coordenadas las llamaremos, tal como hicimos en el caso de las rectas, ecuación de la curva. Las ecuaciones de las curvas serán siempre de segundo grado. Las cónicas que veremos son la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola.

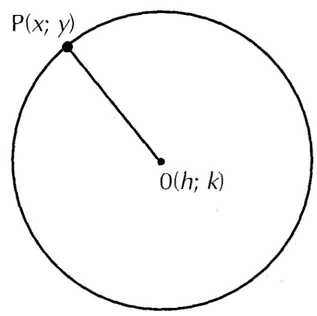
20.1 Circunferencia

20.1.1 Elementos de la circunferencia

Ensaye otra definición para la circunferencia.

Tenga en cuenta que la circunferencia es la curva y que el círculo es el área interior a la curva.

Una circunferencia es una curva cuyos puntos equidistan de un punto llamado centro.



Radio: r
Centro de la circunferencia: $(h; k)$

20.1.2 Ecuación de la circunferencia

a. Ecuación canónica

La distancia entre el punto P y el centro O es r. Si aplicamos la ecuación de la distancia entre dos puntos, tendremos:

$$r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$$

Recuerde que la fórmula de la distancia entre dos puntos es:

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

Si elevamos ambos miembros de la ecuación al cuadrado, tendremos la ecuación canónica de la circunferencia:

$$r^2=(x-h)^2+(y-k)^2$$

b. Ecuación general

Como en el caso de la recta, también en la circunferencia podemos resolver la ecuación y transformarla en una expresión igual a cero. En el caso de la circunferencia, tendríamos lo siguiente:

$$r^2 = x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 \qquad (-r^2)$$
$$0 = x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2$$

Reemplazamos las constantes por los valores D, E y F:

$D = -2h$
$E = -2k$
$F = h^2 + k^2 - r^2$

Así, obtenemos la ecuación general de la circunferencia:

$$x_2 + y_2 + Dx + Ey + F = 0$$

c. Obtención de la ecuación canónica a partir de la ecuación general

Si partimos de la ecuación general de la circunferencia y queremos hallar la ecuación canónica, el problema se resume en hallar los valores de h, k y r a partir de los valores de D, E y F.

Para ello, tenemos las relaciones señaladas anteriormente:

$D = -2h$
$E = -2k$
$F = h^2 + k^2 - r^2$

Si despejamos h en la primera ecuación y k en la segunda, tendremos:

$$h = -\frac{D}{2}; \quad k = -\frac{E}{2}$$

Ya tenemos h y k en función de D y E, ahora falta r. Para ello, reemplazamos los valores obtenidos en la tercera relación:

$$F = \left(-\frac{D}{2}\right)^2 + \left(-\frac{E}{2}\right)^2 - r^2$$

Despejando r, tendremos:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

Ejemplos:

1. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (-2; 3) y radio 4.

Solución:

Aplicando la formula canónica: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = (r)^2$, tenemos:

$h = -2;\ k = 3;\ r = 4$
$(x - (-2))^2 + (x - (3))^2 = (4)^2$
$(x + 2)^2 + (x - 3)^2 = 16$

La demostración para obtener de la fórmula general las fórmulas derivadas no es difícil. Intente realizarlas usted mismo para que pueda recordar las fórmulas con mayor facilidad.

Si conocemos el centro, podremos hallar los valores de h y k con facilidad.
Por lo tanto, nos conviene encontrar la ecuación canónica.

2. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (5; -2) que pase por el punto P (-1; 5).

Solución:

Aplicando la fórmula canónica

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = (r)^2$, tenemos: $h = 5$; $k = -2$

Como el punto P pertenece a la circunferencia, su radio será la distancia del centro al punto $P(-1; 5)$:

$$r=\sqrt{(5+1)^2+(-2-5)^2}=\sqrt{36+49}=\sqrt{85}$$

Dado el punto $A(x; y)$ que pertenece a la circunferencia, la ecuación de esta será:

$$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 85$$

3. Hallar el radio y las coordenadas del centro de la circunferencia de $x^2 + y^2 - 3x + 5y - 14 = 0$.

Solución:

Aplicando la fórmula general, tenemos:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$h=-\frac{D}{2}=\frac{3}{2},\quad k=-\frac{E}{2}=-\frac{5}{2},$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=\frac{1}{2}\sqrt{9+25+56}=\frac{3\sqrt{10}}{2}$$

Centro: (3/2, -5/2)

Radio: $\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

4. Determinar el valor de k para que la ecuación $x^2 + y^2 + - 8x + 10y + k = 0$ represente una circunferencia de radio 7.

Solución:

Aplicando la fórmula general, tenemos: $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$

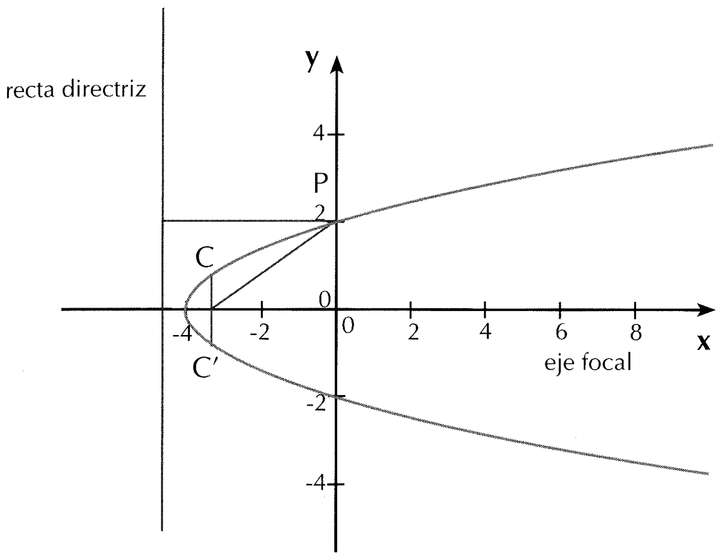
Como $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

Entonces resulta $7=\frac{1}{2}\sqrt{64+100-4k}$

De donde se obtiene que $k = -8$.

20.2 Parábolas

Una parábola es una curva cuyos puntos equidistan de una recta y de un punto fijo. A la recta se le conoce como recta directriz y al punto fijo se le llama foco.



20.2.1 Elementos de la parábola

A la relación entre la distancia de *P* a la recta y de *P* al foco se le llama excentricidad *(e)*. En este caso, como la distancia es la misma, la excentricidad es 1 ($e = 1$).

$$e = \frac{d(\overline{PF})}{d(P; Ld)} = 1$$

El foco de la parábola es $(a; 0)$.

La ecuación de la recta directriz es $x = -a$.

El lado recto mide $4a$.

20.2.2 Ecuación de la parábola

a. Ecuación canónica

Las coordenadas del foco serán siempre $(a; 0)$ y la ecuación de la recta directriz será $x = -a$.

De la ecuación de la excentricidad, tenemos: $d(\overline{PF}) = d(\overline{p; L})$. Si aplicamos respectivamente las fórmulas de distancia entre dos puntos y de distancia de un punto a una recta, tendremos:

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = x + a$$

Recuerde:

Las ecuaciones de la forma x = a son representadas por rectas paralelas al eje y.

Elevando al cuadrado, tendremos: $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$

De donde obtenemos: $y^2 = 4ax$

Esta es la ecuación canónica de una parábola cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas y su eje focal está sobre el eje x.

Si la parábola se desplaza de tal manera que tiene su vértice en el punto $(h; k)$, sus elementos serán:

$F = (h + a; k)$

$V = (h; k)$

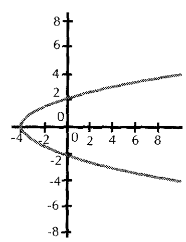
Recta directriz: $x = h - a$

Lado recto: $\overline{CC'} = 4a$

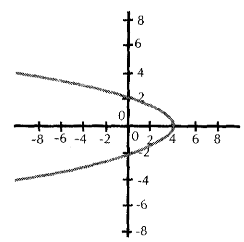
Y su ecuación será: $(y - k)^2 = 4a\,(x - h)$

En general, tenemos cuatro maneras posibles en las que se puede presentar una parábola:

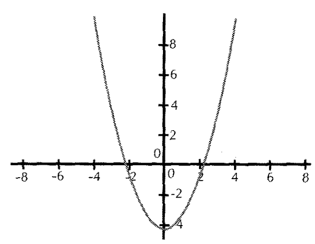
$(y - k)^2 = 4a(x - h)$



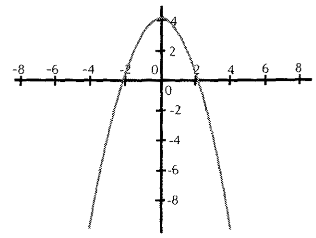
$(y - k)^2 = -4a(x - h)$



$(x - h)^2 = 4a(y - k)$



$(x - h)^2 = -4a(y - k)$



La primera forma de las cuatro presentadas aquí se obtuvo con los parámetros predeterminados. En las otras tres maneras posibles de las parábolas presentadas a la derecha, los parámetros D, E y F varían. Averigüe de qué manera lo hacen.

b. Ecuación general

Igual que en el caso anterior, partiremos de la ecuación canónica.

$$(y - k)^2 = 4a\,(x - h)$$

Resolviendo la ecuación, tenemos:

$y^2 - 2ky + k^2 = 4ax - 4ah \qquad (-4ax + 4ah)$

$y^2 - 2ky + k^2 - 4ax + 4ah = 0$

Reemplazamos las constantes por los valores D, E y F, y nos queda:

$D = -4a$
$E = -2k$
$F = k^2 + 4ah$

Y así obtenemos la ecuación general de la parábola:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

c. Obtención de la ecuación canónica a partir de la ecuación general

Como en el caso de la circunferencia, si partimos de la ecuación general de la parábola y queremos hallar la ecuación canónica, el problema se resume en hallar los valores de h, k y a a partir de los valores de D, E y F.

Para ello, tenemos las relaciones señaladas anteriormente:
$D = -4a$
$E = -2k$
$F = k^2 + 4ah$

Si despejamos a en la primera ecuación y k en la segunda, tendremos:

$$a = -\frac{D}{4}; \quad k = -\frac{E}{2}$$

Ya tenemos a y k en función de D y E, ahora falta h. Para ello, reemplazamos los valores obtenidos en la tercera relación:

$$F = \left(-\frac{F}{2}\right)^2 + 4\left(-\frac{D}{4}\right)h$$

Despejando h, tendremos: $h = \dfrac{E^2 - 4F}{4D}$

Ejemplos:

1. Hallar el foco, la ecuación de la recta directriz y el lado recto de la parábola $y^2 = 12x$.

Solución:

La ecuación canónica de una parábola es $(y - k)^2 = 4a\,(x - h)$; por comparación con la parábola dada, tenemos:

$4a = 12 \qquad (\div 4)$
$a = 3$

Además, observamos que el vértice es el punto (0; 0); por lo tanto, $h = k = 0$.

Reemplazando los valores obtenidos, nos da:
$F = (h + a; k) = (3; 0)$

Para hallar la ecuación canónica, sólo debemos identificar los valores de *D*, *E* y *F* para reemplazarlos en las fórmulas de *a*, *h* y *k*.

Recta directriz: $x = h - a$, $x = -3$

Lado recto: $CC' = 4a = 12$

2. Hallar la ecuación canónica de la siguiente parábola:

$$y^2 - 3x + 2y + 4 = 0.$$

Solución:

La ecuación general de una parábola es $y^2 + Dx + Ey + F = 0$. Por comparación con la parábola dada, tenemos:

$D = -3$

$E = 2$

$F = 4$

Reemplazamos los valores obtenidos:

$$a = -\frac{D}{4} = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$k = -\frac{E}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

$$h = \frac{E^2 - 4F}{4D} = \frac{2^2 - 4\bullet(4)}{4(-3)} = \frac{-12}{-12} = 1$$

Ahora reemplazamos estos nuevos valores obtenidos en la ecuación canónica de la parábola: $(y - k)^2 = 4a(x - h)$

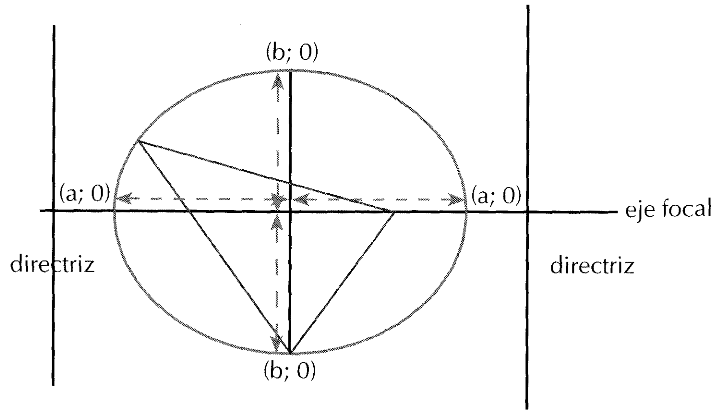
$$(y - (-1))^2 = 4\left(\frac{3}{4}\right)(x - 1)$$

Si resolvemos, tendremos que la ecuación canónica es:

$(y + 1)^2 = 3(x - 1)$

20.3 Elipses

Una elipse es una curva cerrada en la cual la suma de las distancias de cualquiera de sus puntos a dos puntos fijos (llamados focos) es constante.



Por la definición de la elipse, tenemos:

$$\boxed{d(PF_1) + d(PF_2) = 2a}$$

Además, del gráfico vemos que se cumple el teorema de Pitágoras:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Una vez que domine el tema, ensaye otra definición para la elipse.

20.3.1 Elementos de la elipse

A la relación entre la distancia de P a una de las rectas directrices y de P al foco se le llama excentricidad *(e)*. En una elipse, la excentricidad será siempre menor que 1.

$$e = \frac{d(PF)}{d(P;Ld)} < 1$$

El centro de la elipse es el punto medio entre los dos focos.

Las coordenadas de los focos son $(-c; 0)$ y $(c; 0)$.

Las ecuaciones de las rectas directrices son $x = -\frac{a}{e}$, y $x = \frac{a}{e}$.

El eje mayor de la elipse es la recta que pasa por los focos.

El eje menor de la elipse es la recta perpendicular al eje mayor que pasa por el centro.

El lado recto es $\frac{2b^2}{a}$.

Los vértices de la elipse son:

Extremos del eje mayor: $(-a; 0)$ y $(a; 0)$.

Extremos del eje menor: $(0; -b)$ y $(0; b)$.

20.3.2 Ecuación de la elipse

a. Ecuación canónica

De la definición de la elipse, tenemos que la suma de las distancias de un punto a los focos es constante:

$$d(P; F_1) + d(P; F_2) = 2a.$$

Si aplicamos la fórmula de la distancia entre dos puntos, tendremos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Si resolvemos esta ecuación, llegaremos a la expresión: $(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

Sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$, de donde $a^2 - c^2 = b^2$.

Reemplazamos dicho valor en la ecuación y obtenemos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividimos todo entre a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta es la ecuación canónica de una elipse cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas y su eje focal está sobre el eje x.

Si la elipse se desplaza de tal manera que tenga su vértice en el punto $(h; k)$, sus elementos serán:

Centro: $(h; k)$

Focos: $(h - c; k)$ y $(h + c; k)$

Ecuaciones de las rectas directrices son $x = h - \frac{a}{e}$, y $x = h + \frac{a}{e}$

Vértices:

Extremos del eje mayor: $(h - a; k)$, $(h + a; k)$.

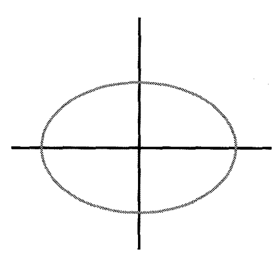
Extremos del eje menor: $(h; k - b)$, $(h; k + b)$.

Y su ecuación será: $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

En general, tenemos dos maneras posibles en las que se puede presentar una elipse:

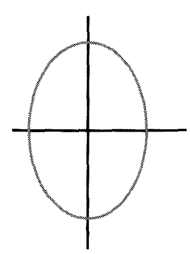
Eje mayor es paralelo al eje x:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



Eje mayor paralelo al eje y:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



b. Ecuación general

Al igual que en los casos anteriores, partiremos de la ecuación canónica:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Resolviendo la ecuación, tenemos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

Reemplazamos las constantes por los valores D, E y F:

$A = b^2$
$B = a^2$
$D = -2b^2h$
$E = -2a^2k$
$F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$

Observe la semejanza del procedimiento empleado aquí con el de los casos anteriores.

Y así obtenemos la ecuación general de la elipse:

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

c. Obtención de la ecuación canónica a partir de la ecuación general

Como en los casos anteriores, si partimos de la ecuación general de la elipse y queremos hallar la ecuación canónica, el problema se resume en hallar los valores de h, k, a y b a partir de los valores de A, B, D, E y F.

Para ello, tenemos las relaciones señaladas anteriormente:

$A = b^2$
$B = a^2$
$D = -2b^2h$
$E = -2a^2k$
$F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$

Si despejamos b en la primera ecuación y a en la segunda, tendremos:

$$a = \sqrt{B}$$
$$b = \sqrt{A}$$

Ya tenemos a y b en función de A y B, ahora faltan h y k. Para ello, reemplazamos los valores obtenidos en la tercera y en la cuarta relación:

$$D = -2\left(\sqrt{A}\right)^2 h$$
$$E = -2\left(\sqrt{B}\right)^2 k$$

Despejando h y k respectivamente, tendremos:

$$h = -\frac{D}{2A}$$
$$k = -\frac{E}{2B}$$

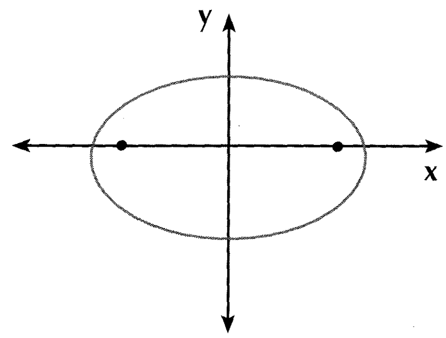
Igual que en los casos anteriores, analice cómo se modifican estos valores cuando la elipse rota 90°.

Ejemplos:

1. Hallar la ecuación de la elipse de focos (-2; 0), (2; 0) que pasa por el punto (2; -3)

Solución:

Tenemos las coordenadas de los focos que están situados en el eje x.



Los puntos mostrados son los focos de la elipse, $c = 2$.

Además de la ecuación canónica de la elipse, sabemos:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Por estar ubicado el centro de la elipse en el origen, se deduce que:

$$\frac{(x)^2}{a^2}+\frac{(y)^2}{b^2}=1.$$

Y con el punto dado (2; -3), tenemos:

$\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$ .... (I)

Además, sabemos que $c^2 = a^2 - b^2$ (propiedad de la elipse)

$\rightarrow 4 = a^2 - b^2 \rightarrow 4 + b^2 = a^2$ ....(II)

(II) en (I): $\frac{4}{4+b^2}+\frac{9}{b^2}=1$

$\rightarrow \frac{4}{4+b^2}=1-\frac{9}{b^2} \rightarrow \frac{4}{4+b^2}=\frac{b^2-9}{b^2}(xb^2(4+b^2))$

$0 = b^4 - 9b^2 - 36$ (por aspa simple)

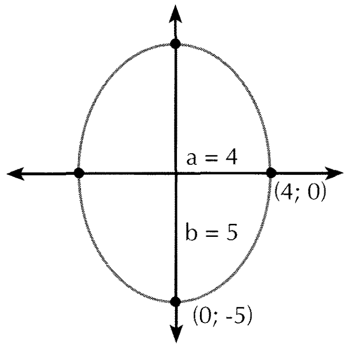
$0 = (b^2 - 12)(b^2 + 3) \rightarrow b^2 = 12$ o $b^2 = -3$, lo cual es absurdo.

Entonces $b^2 = 12 \rightarrow a^2 = 16$

Finalmente, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

2. Hallar la ecuación general de la elipse con centro en el origen de coordenadas y que pasa por los puntos (4; 0) y (0; -5).

Solución:



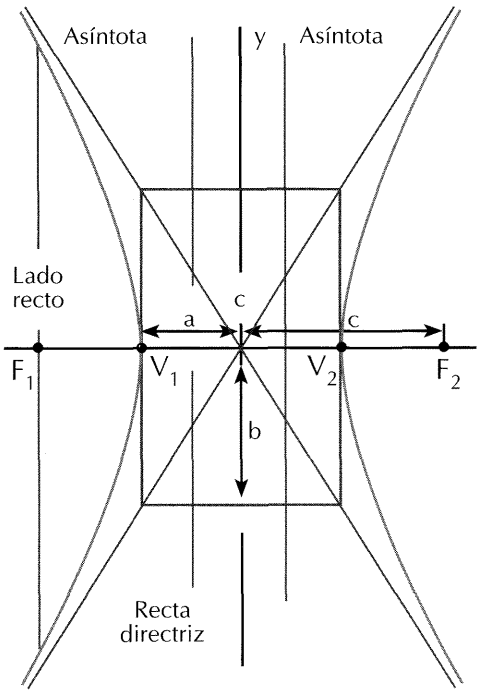
La ecuación será: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$

En forma general: $25x^2 + 16y^2 = 400$

20.4 Hipérbolas

Una hipérbola es una pareja de curvas en las cuales se cumple que la diferencia de las distancias de cualquiera de sus puntos a dos puntos fijos llamados focos es constante.

Una vez que domine el tema, ensaye otra definición para la hipérbola.



Por la definición de la hipérbola, tenemos:

$$\boxed{d\,(PF_1) - d\,(PF_2) = 2a}$$

Además, del gráfico vemos que se cumple el teorema de Pitágoras:

$$\boxed{c^2 = b^2 + a^2}$$

No se confunda. La hipérbola no está formada por dos parábolas.

20.4.1 Elementos de la hipérbola

A la relación entre la distancia de P a una de las rectas directrices y de P al foco se le llama excentricidad (e). En una elipse, la excentricidad será siempre mayor que 1.

$$e = \frac{d(PF)}{d(P;Ld)} > 1.$$

El centro de la elipse es el punto medio entre los dos focos.

Las coordenadas de los focos son (-c, 0) y (c; 0).

Las ecuaciones de las rectas directrices son $x = -\frac{a}{e}$, y $x = \frac{a}{e}$.

El lado recto es $\frac{2b^2}{a}$

Los vértices de la elipse son (-a; 0) y (a; 0).

Las asíntotas son rectas que tienden infinitamente a acercarse a la curva, pero nunca llegan a tocarla. La hipérbola tiene dos asíntotas cuyas ecuaciones son:

$$y = -\frac{b}{a}x; \quad y = \frac{b}{a}x$$

20.4.2 Ecuaciones de la hipérbola

a. Ecuación canónica

De la definición de la hipérbola, tenemos que la diferencia entre las distancias de un punto a los focos es constante:

$d(P; F_1) - d(P; F_2) = 2a$. Si aplicamos la fórmula de la distancia entre dos puntos, tendremos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Si resolvemos esta ecuación, llegaremos a la expresión:

$$(c^2 - a^2)\, x^2 - a^2y^2 = a^2\,(c^2 - a^2).$$

Sabemos que $c^2 = b^2 + a^2$, de donde $c^2 - a^2 = b^2$.

Reemplazamos dicho valor en la ecuación anterior y tenemos:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividimos todo entre a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta es la ecuación canónica de una elipse cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas y su eje focal está sobre el eje x.

Si la elipse se desplaza de tal manera que tenga su vértice en el punto (h; k), sus elementos serán:

Centro: $(h; k)$.
Focos: $(h - c; k)$ y $(h + c; k)$.

Ecuaciones de las rectas directrices: $x = h - \frac{a}{e}$, y $x = h + \frac{a}{e}$.

Asíntotas: $y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$; $y - k = \frac{b}{a}(x - h)$.

Y su ecuación será: $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

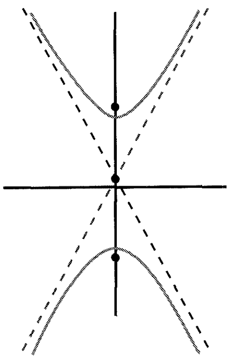
En general, tenemos dos maneras posibles en las que se puede presentar una elipse:

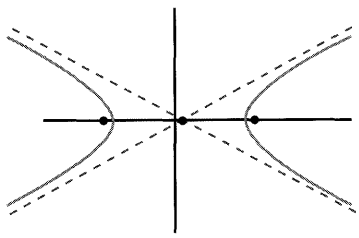
Eje mayor es paralelo al eje x:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Eje mayor paralelo al eje y:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-k)^2}{b^2} = 1$$





Igual que en los casos anteriores, aquí también puede observar la variación de los parámetros en uno y en otro caso.

b. Ecuación general

Igual que en los casos anteriores, partiremos de la ecuación canónica.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Resolviendo la ecuación, tenemos:

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2hx + 2a^2ky - b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

Reemplazamos las constantes por los valores D, E y F:
$A = b^2$
$B = -a^2$
$D = -2b^2h$
$E = 2a^2k$
$F = b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2$

Y así obtenemos la ecuación general de la hipérbola:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Esta ecuación coincide con la ecuación general de la elipse; pero en el caso de la elipse, A y B tienen el mismo signo, mientras que en las hipérbolas A y B son de signos distintos.

c. **Obtención de la ecuación canónica a partir de la ecuación general**

Como en los casos anteriores, si partimos de la ecuación general de la elipse y queremos hallar la ecuación canónica, el problema se resume en hallar los valores de h, k, a y b a partir de los valores de A, B, D, E y F.

Para ello, tenemos las relaciones señaladas anteriormente:

$A = b^2$
$B = -a^2$
$D = -2b^2h$
$E = 2a^2k$
$F = b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2$

En el caso de la hipérbola, B será siempre negativo. Por eso, es posible obtener un valor real para $\sqrt{-B}$.

Si despejamos b en la primera ecuación y a en la segunda, tendremos:

$$a = \sqrt{-B}.$$
$$b = \sqrt{A}$$

Ya tenemos a y b en función de A y B, ahora faltan h y k. Para ello, reemplazamos los valores obtenidos en la tercera y en la cuarta relación:

$$D = -2\left(\sqrt{A}\right)^2 h$$
$$E = -2\left(\sqrt{-B}\right)^2 k$$

Despejando h y k respectivamente, tendremos:

$$h = -\frac{D}{2A}$$
$$k = \frac{E}{2B}$$

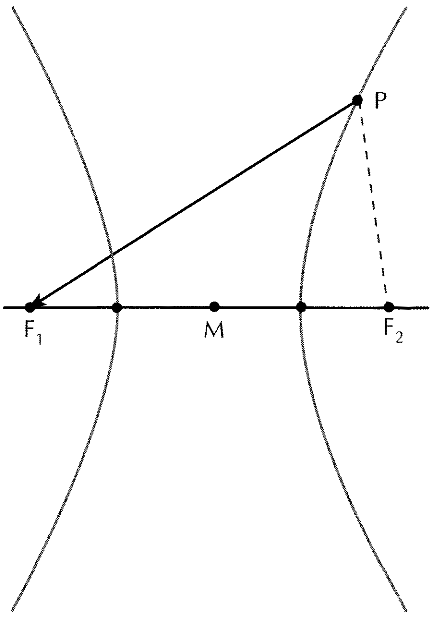
Ejemplos:

1. Formar la ecuación de una hipérbola si se sabe que las coordenadas del foco F y del punto M de la hipérbola son, respectivamente:

$$F = (\pm\ 13; 0) \text{ y } M = (22; 12)$$

Solución:

Dadas las coordenadas del foco, sabemos que están en el eje x; por tanto, la hipérbola será:



Luego, el foco $c = 13$

Por propiedad de la hipérbola, tenemos:

$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 169 = a^2 + b^2 \rightarrow 169 - a^2 = b^2$.................... (I)

Sustituimos el punto M en la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{(22)^2}{a^2} - \frac{(12)^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{484}{a^2} - \frac{144}{b^2} = 1$$

Modificamos la ecuación anterior: $\frac{484}{a^2} = \frac{144}{b^2} + 1$ ....(II)

Si sustituimos (I) en (II), tendremos:

$$\frac{484}{a^2} = \frac{144}{169 - a^2} + 1 \rightarrow \frac{484}{a^2} = \frac{144 + 169 - a^2}{169 - a^2}$$

$$\rightarrow a^4 - 797a^2 + 484 \bullet 169 = 0$$

Sustituyendo a^2 por y nos queda: $y^2 - 797y + 484 \bullet 169 = 0$

Al resolverla, tenemos $y = 121$ e $y = 676$.

Entonces $a^2 = 121$ y $a^2 = 676$

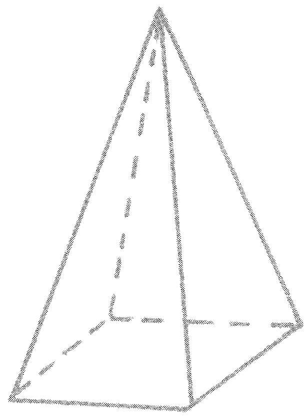
Pero esta última solución es absurda, dado que a es menor que c.

Por lo tanto, $a^2 = 121$ en: $169 - a^2 = b^2$

$b^2 = 48$, y la ecuación de la hipérbola será: $\frac{x^2}{121} - \frac{y^2}{48} = 1$

2. Dada la ecuación general de la hipérbola, determinar su ecuación canónica.

$$9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$$



Solución:

Agrupamos los términos que contienen x, y también a los que contienen y:

$$9(x^2 - 2x) - 4(y^2 + 4y) + 29 = 0$$

Completamos cuadrados en cada uno de los paréntesis y restamos las cantidades añadidas:

$$9(x^2 - 2x + 1) - 4(y^2 + 4y + 4) + 29 = 9 + -16$$
$$9(x - 1)^2 - 4(y + 2)^2 = -36$$

Reacomodamos coeficientes convenientemente:

$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

Ejercicios resueltos

Antes de entrar a esta sección, es recomendable que elabore un cuadro comparativo de las propiedades de las cuatro cónicas que hemos estudiado.

1. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro (-7; -1) y radio 3.

   Solución:

   Aplicando la fórmula canónica $(x - h)^2 + (y - k)^2 = (r)^2$, tenemos:

   $h = -7;\ k = -1;\ r = 3$

   $(x - (-7))^2 + (y - (-1))^2 = (3)^2$

   $(x + 7)^2 + (y + 1)^2 = 9$

2. Halle la ecuación de la circunferencia siendo el centro (-2; 1) y su punto de paso $P(0; -2)$.

   Solución:

   Aplicando la fórmula canónica $(x - h)^2 + (y - k)^2 = (r)^2$, tenemos:

   $h = -2;\quad k = 1;\quad r = \sqrt{(-2-(0))^2 + (1-(2))^2}$

   $r = \sqrt{13}$

   Entonces $\quad (x^2 - (2))^2 + (y - (1))^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2$

   $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 13$

3. Determinar el valor de k para que la ecuación $x^2 + y^2 - 5x + 3y + k = 0$ represente una circunferencia de radio 10.

   Solución:

   Aplicamos la fórmula general:

   $$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Como $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$, resulta $10=\frac{1}{2}\sqrt{25+9-4k}$

Por último, despejamos k = -183/2.

4. Hallar la ecuación de la circunferencia que pase por el punto (0; 0), que tenga radio r = 13 y que la abscisa de su centro sea -12.

Solución:

Como la circunferencia pasa por el origen,

$h^2 + k^2 = r^2 \Rightarrow 144 + k^2 = 169$

Resolvemos:

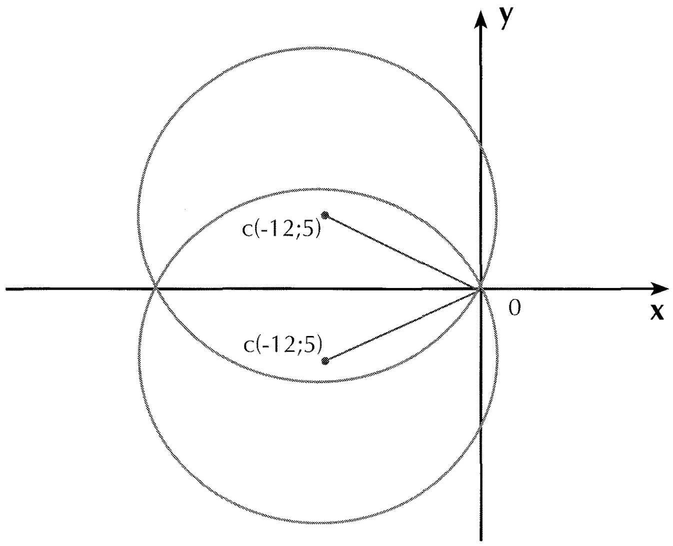
$$k^2 = 169 - 144 = 25, \quad k = \pm 5$$

Luego, tenemos dos opciones:

$$(x + 12)^2 + (y - 5)^2 = 169; (x + 12)^2 + (y + 5)^2 = 169$$

Desarrollamos:

$$x^2 + y^2 + 24x - 10y = 0; \quad x^2 + y^2 + 24x + 10y = 0$$



5. Halle la ecuación de la elipse que tiene su centro en (0; 0) y cuyos focos son los puntos $F(3; 0)$ y $F'(-3; 0)$. Además, una intersección de la gráfica con el eje x es el punto (5; 0).

Solución:

Como la elipse corta al eje x en el punto (5; 0), se sigue que a = 5; y como c = 3, se tiene que $b^2 = 5^2 - 3^2 = 16$ y, por tanto, $b = \pm 4$

De esta forma, los vértices de la elipse son los puntos $V_1(5; 0)$, $V_2(-5, 0)$, $V_3(0, 4)$ y $V_4(0, -4)$.

Además, su ecuación viene dada por

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

6. Dada la ecuación $5x^2 + 9y^2 - 80x + 54y + 221 = 0$, determine el centro, las coordenadas de los focos, las coordenadas de los vértices, el eje mayor y el eje menor.

Solución:

Asociando y completando cuadrados, tenemos:
$(5x^2 - 80x) + (9y^2 + 54y) = -221$
$5(x^2 - 16x) + 9(y^2 + 6y) = -221$
$5(x^2 - 16x + 64) + 9(y^2 + 6y + 9) = -221 + 5 \bullet 64 + 9 \bullet 9$
$5(x - 8)^2 + 9(y + 3)^2 = 180$
$(x - 8)^2/36 + (y + 3)^2/20 = 1$

Según la ecuación, centro: $C(8; -3)$

Eje mayor $y = -3$ y Eje menor $y = 8$

$\rightarrow a^2 = 36: \ a_1 = 6 \ \text{ y } \ a_2 = -6$.
$\rightarrow b^2 = 20: \ b_1 = \sqrt{20} \ \text{ y } \ b_2 = -\sqrt{20}$
$\rightarrow c^2 = 16: \ c_1 = 4 \ \text{ y } \ c_2 = -4$

Entonces, los focos son:
$F_1(8 - 4; -3) = F_1(4; -3)$
$F_2(8 + 4; -3) = F_2(12; -3)$

Vértices:
$V_1(8 - 6; -3) = V_1(2; -3)$
$V_2(8 + 6; -3) = V_2(14; -3)$

7. Encuentre la ecuación de la elipse con centro en el origen que tenga uno de sus focos en $(0; 3)$ y que la longitud de su semieje mayor sea 5.

Solución:

La ecuación de la forma: $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$

Foco en $(0; 3) \Rightarrow c = 3$

Longitud de eje mayor es $2a$.

$\Rightarrow a = 5$ y tenemos que $c^2 = a^2 - b^2$, o bien $b^2 = a^2 - c^2$

Entonces
$b^2 = 25 - 9 = 16$
$b_1 = 4$ y $b_1 = -4$

Por lo tanto, la ecuación es $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16}=1$.

8. Encuentre la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyo eje mayor está sobre el eje x, y que, además, pasa por los puntos (4; 3) y (6; 2).

Solución:

Como $P1(4; 3)$ y $P2(6; 2)$ pertenecen a la curva y deben satisfacer la ecuación, entonces

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$16/a^2 + 9/b^2 = 1$ .... (I)
$36/a^2 + 4/b^2 = 1$ .... (II)

Resolviendo el sistema de ecuaciones, encontramos que

$-64/a^2 + y^2/a^2 = 5$

$260/a^2 = 5 \qquad a^2 = 260/5 \qquad a^2 = 52$

Reemplazando en cualquiera de las dos ecuaciones, se tiene que $b^2 = 13$.

Por lo tanto, la ecuación de la elipse es: $\dfrac{x^2}{52} + \dfrac{y^2}{13} = 1$

9. Reducir la ecuación $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y - 23 = 0$. Si se trata de una elipse, hallar su centro, sus focos y sus vértices.

Solución:

Se agrupan los términos en x^2 con los términos en x, y los términos en y^2 con los términos en y: $(4x^2 - 8x) + (9y^2 + 18y) - 23 = 0$

Se extrae el factor común en cada paréntesis, el coeficiente del término de segundo grado: $4(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 2y) - 23 = 0$

Se opera en cada paréntesis hasta obtener un cuadrado perfecto: $4(x - 1)^2 + 9(y + 1)^2 = 36$

Se divide entre 36:

$$\frac{4(x-1)^2}{36} + \frac{9(y+1)^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

Centro de la elipse: (1; -1)

Focos:

Para hallar los focos, hay que observar que estos se hallan en una recta horizontal que contiene al centro. Basta con sumar y restar c a la abscisa del centro.

$$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 3^2 - 2^2 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}$$

Los focos son $F(1+\sqrt{5};-1)$ y $F`(1-\sqrt{5};-1)$

Los vértices se obtienen sumando y restando a las coordenadas del centro los semiejes de la elipse:

$(1 \pm 3; -1)$, lo que da los puntos $(4; -1)$ y $(-2; -1)$

$(1; -1 \pm 2)$, lo que da los puntos $(1; 1)$ y $(1; -3)$

10. Identifique cuál tipo de cónica es la descrita por la ecuación $x^2 + 3y^2 - 8x - 12y + 32 = 0$.

Solución:

Agrupamos términos y completamos cuadrados adecuadamente:

$(x^2 - 8x) + (3y^2 - 12y) + 32 = 0$

$(x^2 - 8x) + 3(y^2 - 4y) + 32 = 0$

$x^2 - 8x = x^2 + 16 - 16 - 8x = (x - 4)^2 - 16$

$y^2 - 4y = y^2 + 4 - 4 - 4y = (y - 2)^2 - 4$

$(x - 4)^2 + 3(y - 2)^2 - 16 - 12 + 32 = 0$

$(x - 4)^2 + 3(y - 2)^2 = -4$

Como el primer miembro es una suma de números positivos y el segundo es un número negativo, la ecuación no tiene solución.

11. Hallar la ecuación canónica de la hipérbola con vértices en $(3; -5)$ y $(3; 1)$, y asíntotas $y = 2x - 8$ e $y = -2x + 4$. Además, calcular los focos, la excentricidad y trazar la gráfica.

Solución:

Por ser el centro el punto medio de los vértices, sus coordenadas son $(3; -2)$. Además, la hipérbola tiene eje transversal vertical y $a = 3$. Por otro lado, por el teorema de las asíntotas:

$$m1 = 2 = \frac{a}{b} \Rightarrow b = \frac{a}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

Entonces, la ecuación canónica es: $\dfrac{(y+2)^2}{9} - \dfrac{(x-3)^2}{\frac{9}{4}} = 1$

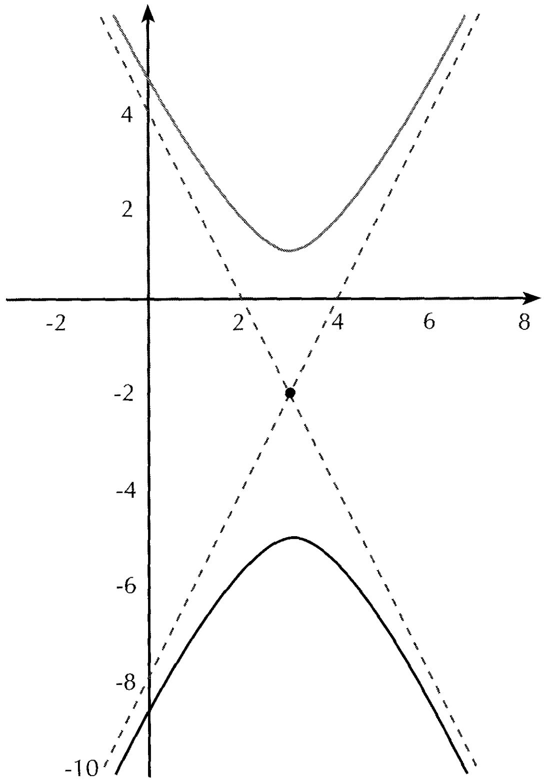
El valor de c está dado por

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = \frac{45}{4} \Rightarrow c = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Los focos están en $\left(3; -2 - \dfrac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ y $\left(3; -2 + \dfrac{3\sqrt{5}}{2}\right)$

la excentricidad es $e = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

La gráfica es la siguiente:



12. Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene por focos los puntos F(-3; 0) y F(3; 0), y que pasa por el punto $P(8;5\sqrt{3})$

Solución:

Como los focos de la hipérbola están sobre el eje OX y el punto (0; 0) es el punto medio de los dos focos, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hallamos la constante de la hipérbola: $|d(P, F) = d(P, F)| = 2a$

$$d(P;F) = \sqrt{(8+3)^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{121+253} = \sqrt{196} = 14$$

$$d(P;F) = \sqrt{(8+3)^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{25+253} = \sqrt{100} = 10$$

Por lo que $|14 = 10| = 2a \rightarrow 4 = 2a \rightarrow a = 2$.

De las coordenadas de los focos, sabemos que $c = 3$.

En una hipérbola, se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$; por lo tanto,
$3^2 = 2^2 + b^2 \quad 9 = 4 + b^2, \quad b^2 = 5$

La ecuación es: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$

13. Dada la hipérbola cuya ecuación en su forma general es $3y^2 - x^2 + 4x - 6y - 13 = 0$, determine el centro, los focos, los vértices y las ecuaciones de las asíntotas.

Solución:

La ecuación general puede escribirse en las formas equivalentes:

$$(3y^2 - 6y) - (x^2 - 4x) = 13$$

$$3(y^2 - 2y + 1 - 1) - (x^2 - 4x + 4 - 4) = 13$$

$$3(y - 1)^2 - (x - 2)^2 = 12$$

$$\frac{(y-1)}{4} - \frac{(x-2)}{12} = 1$$

Esta última ecuación corresponde a una hipérbola cuyo centro es el punto $C(2; 1)$ y su eje focal es una recta paralela al eje y que pasa por $C(2; 1)$. En este caso, $x = 2$

Además, $a^2 = 4$, $b^2 = 12$.

Con lo cual, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 4$.

Las coordenadas de los focos son $x = 2e \quad y = 1 \pm 4$.

Esto es $F(2; 5)$ y $F(2; -3)$. Igualmente, las coordenadas de los vértices son $x = 2 \quad y = 1 \pm 2$.

Esto es, $V_1(2; 3)$ y $V_2(2; -1)$.

Las ecuaciones de las asíntotas son las siguientes rectas:

$$y - 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-2) \quad \text{e} \quad y - 1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$$

14. Demostrar que la ecuación de una hipérbola con focos en los puntos $F(c; 0)$ y $F'(-c; 0)$ es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Solución:

Se toma la expresión de uno de los radios vectores y se opera en ella:

$$PF = \left|\frac{c}{a}x - a\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \qquad \text{Elevando al cuadrado.}$$

$$\left(\frac{c}{a}x - a\right)^2 = (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2 = x^2 - 2cx + y^2$$

$$\Rightarrow \frac{c^2}{a^2}x^2 + a^2 = x^2 + c^2 + y^2 \Rightarrow c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 - a^2c^2 - a^2y^2 = 0$$

Extrayendo el factor común $(c^2 - a^2)$, nos queda:

$$(c^2 - a^2)x^2 + a^2(a^2 - c^2) - a^2y^2 = 0$$

Pero $c^2 - a^2 = b^2$; luego, $b^2x^2 - a^2b^2 - a^2y^2 = 0$.

Dividimos entre a^2b^2

Obtenemos $\frac{x^2}{a^2} - 1 - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

En caso que la hipérbola tenga el eje vertical, la ecuación sería:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

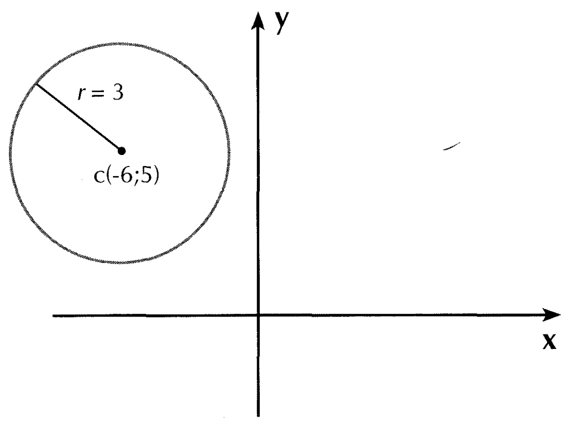
Ejercicios propuestos

Recuerde que antes de pasar a esta sección, debe haber resuelto los casos más representativos de la sección anterior.

1. Graficar la circunferencia que tiene como centro el punto de intersección de las rectas:

   L_1: $x + 2y - 4 = 0$
   L_2: $x + y + 1 = 0$
   y tiene radio $r = 3$

   R.



2. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (2; 3) y (-1; 1), y cuyo centro está situado en la recta $x - 3y - 11 = 0$.

   R. $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{130}{4}$ o $x^2+y^2-7x+5y-14=0$

3. Hallar la ecuación de la circunferencia de radio 5 que sea tangente a la recta $3x + 4y - 16 = 0$ en el punto (4; 1).

   R. $(x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 25$ o $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$

4. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (5; 3), (6; 2) y (3; -1).

   R. $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$

5. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro en el punto (-4; 2) y que sea tangente a la recta $3x + 4y - 16 = 0$.

   R. $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$, o $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$

6. Hallar la longitud de la tangente desde el punto $P_1(x_1; y_1)$ a la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

R. $d = \sqrt{(x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2 - r^2}$

7. Hallar la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ que sea tangente a la recta $3x - 4y + 7 = 0$.

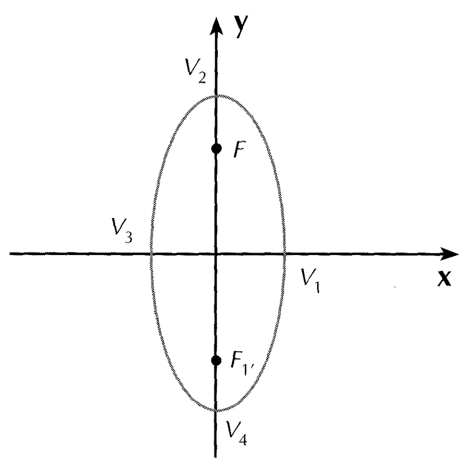
R. $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$

8. Hallar las ecuaciones de las circunferencias de radio 15 que sean tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 100$ en el punto (6; -8).

R. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 225$ y $(x - 15)^2 + (y + 20)^2 = 225$

9. Trazar la elipse cuya ecuación viene dada por $25x^2 + 4y^2 = 100$.

R.



10. Determine el centro, los vértices y los focos de la elipse que tiene por ecuación $4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 13 = 0$.

R. $C = (2;-1)$, $V_1(2;1)$, $V_2(2;-3)$, $V_3(3;-1)$ y $V_4(1;-1)$
$F_1 = (2;-1+\sqrt{3})$ y $F_2 = (2;-1-\sqrt{3})$

11. Hallar la ecuación canónica de la elipse $4x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$. Identificar los vértices, los focos, el centro y la excentricidad.

R. $\dfrac{(x-1)^2}{4} + \dfrac{(y+2)^2}{16} = 1$, $C = (1;-2)$

Focos: $F_1 = (1;-2+2\sqrt{3})$, $F_2 = (1;-2-2\sqrt{3})$

Vértices: $(1;-6)$ y $(1;2)$, $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

12. Hallar la ecuación canónica de la elipse con vértices en (3; 1) y (3; 9), y el eje menor de longitud 6.

R. $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$

13. Hallar la ecuación de la elipse que pasa por el punto (3; 1) y que tiene sus focos en (4; 0) y (-4; 0).

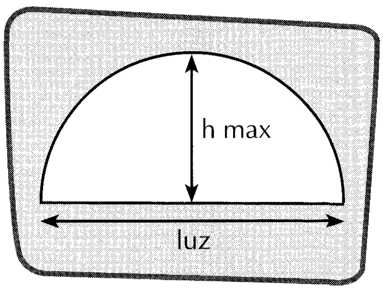
R. $\frac{(x)^2}{18} + \frac{(y)^2}{2} = 1$

14. Determine la ecuación canónica de la elipse con ejes paralelos a los ejes coordenados y que pasa por los puntos (-1; 0), (3; 0), (0; 2) y (0; -2).

R. $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{3(y)^2}{16} = 1$

15. La Tierra describe una trayectoria elíptica alrededor del Sol, el cual se encuentra en uno de sus focos. Sabiendo que el semieje mayor de esta elipse vale 1,485 • 10^8 kilómetros y que la excentricidad de la elipse vale aproximadamente 1/62, hallar la distancia de la Tierra al Sol en verano e invierno.

R. Distancia máxima (afelio, invierno): 1,509 • 10^8 km.
Distancia mínima (perihelio, verano): 1,461 • 10^8 km.



16. Un arco tiene la forma de semielipse, con la luz de 150 metros, siendo su altura máxima de 45 metros. Hallar la longitud de dos soportes verticales situados cada uno a igual distancia del extremo del arco y a igual distancia entre sí.

R. $30\sqrt{2}\ m$

17. Los focos y los vértices de una hipérbola son los puntos $F_1(5; 0)$, $F_2(-5; 0)$, $V_1(4; 0)$ y $V_2(-4; 0)$, respectivamente. Determine la ecuación de la hipérbola.

R. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

18. Dada la hipérbola cuya ecuación es $7y^2 - 9x^2 = 63$, determine las coordenadas de los focos, las de los vértices y las ecuaciones de las asíntotas.

R. $F_1(0; 4)$, $F_2(0; -4)$; $V_1(0; 3)$ y $V_2(0; -3)$.

Asíntotas: $y = \frac{3}{\sqrt{7}}x$ e $y = -\frac{3}{\sqrt{7}}x$.

19. Una hipérbola cuyo centro es el punto $C(2; 3)$ tiene sus focos sobre la recta $y = 3$. Además, la distancia entre los focos es 10 unidades y la distancia entre sus vértices es 8 unidades. Determine las coordenadas de los vértices, las de los focos y las ecuaciones de las asíntotas.

R. $F(7; 3)$, $F'(-3; 3)$, $V_1(6; 3)$ y $V_2(-2; 3)$.

Asíntotas: $3x - 4y + 6 = 0$; $3x + 4y - 18 = 0$.

20. Hallar la ecuación de la hipérbola de ejes paralelos a los ejes coordenados, sabiendo que el lado recto vale 18 y que la distancia entre los focos es igual a 12.

R. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$ o $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$

21. Hallar la ecuación reducida de la hipérbola:

$$4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0.$$

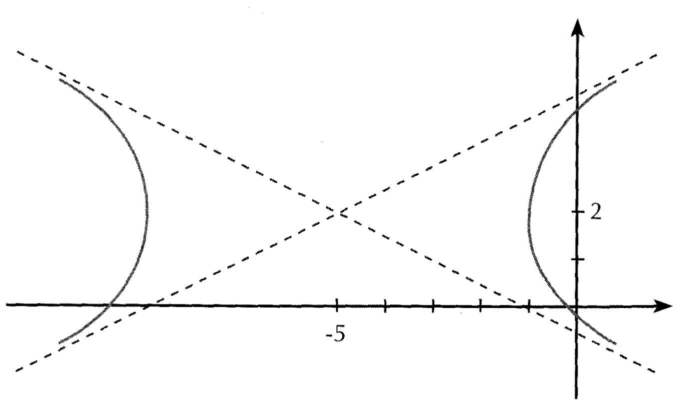
Además, indique su centro, sus vértices, sus focos y sus asíntotas.

R. $V(1;0)$, $V(1;4)$, $F(1;2+\sqrt{13})$, $F(1;2-\sqrt{13})$

Asíntotas: $y-2=\frac{2}{3}(x-1)$, e $y-2=-\frac{2}{3}(x-1)$

22. Graficar la hipérbola $\frac{(x+5)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

R.



23. El equipo Lima Sporting Club juega en un estadio con capacidad de asientos de 15 000 espectadores. El precio de la entrada es de S/. 12. Además, debe tomarse en cuenta que promedia una

recaudación de S/. 132 000. Una reciente investigación de mercado indica que por cada sol que se baje en el precio de la entrada, el promedio de asistencia se incrementará en 1000 asistentes. ¿Cuál debe ser el precio al que se debe fijar la entrada para obtener la máxima recaudación?

R. S/. 11,5

24. La curva de costos de producción de cierta máquina que produce X unidades por proceso viene dada por una circunferencia de radio $\sqrt{8}$ con centro en el origen. ¿Qué es más conveniente para la empresa: que la máquina produzca unidades individuales o en pares?

R. Es más conveniente que sea en pares.

25. La oferta de celulares de la empresa REDCELL viene dada por la ecuación: $p^2 - q^2 = 1$. Además, la demanda satisface la relación: $pq = 1$. Hallar el punto de equilibrio. Además, encontrar la variación de la oferta respecto de la cantidad cuando se producen infinitas unidades.

R. a. (0,786; 1,272)

b. 1

26. El costo de producción de una mercancía es \$12 menos por unidad en un punto A que en un punto B, y la distancia entre A y B es de 100 km.

Asumiendo que la ruta de entrega de la mercancía se encuentra a lo largo de una línea recta, y que además la entrega tiene un costo de 20 centavos por unidad por km, se solicita encontrar la curva en cualquier punto del cual la mercadería pueda ser distribuida de A a B al mismo costo.

(Sugerencia: tome a los puntos A y B en las siguientes ubicaciones (-50;0) y (50;0) respectivamente).

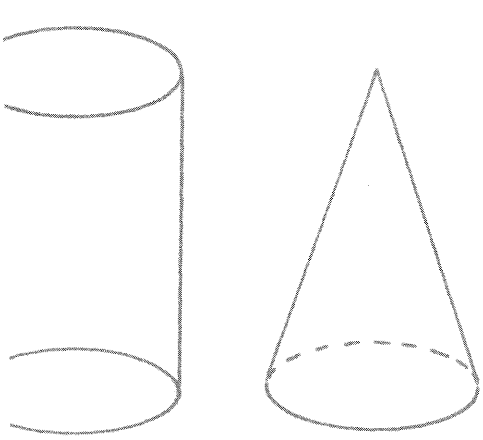
R. la rama derecha de la hipérbola $16x^2 - 9y^{23} = 144$

27. Una compañía de plásticos planea lanzar al mercado individuales para niños. La forma será rectangular y contará con un perímetro de 100cm, como estipulan las normas. La compañía está dispuesta a invertir lo menos posible en la elaboración de dichos individuales. Se sabe que el costo por cm^2 es de S/. 0,005. ¿Cuáles serán las dimensiones del individual? ¿Y el costo?

R. 2,5 x 25 cm^2 ; costo S/. 3,125

28. El precio de venta de un determinado producto en dólares es $1000 - 5x$. Se desea saber cuál será el valor del ingreso máximo para la empresa. Además, si el costo viene dado por $3x^2 + 900x$ (en dólares), hallar la máxima utilidad obtenida.

R. \$50 000; \$312,5



UNIDAD 08

Matrices

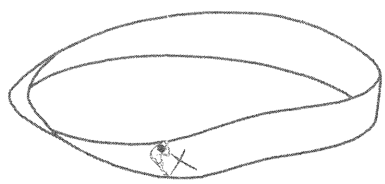
Capítulo 21
MATRICES

21.1 Definición

Una matriz es un conjunto de números ordenados rectangularmente que forman filas (líneas horizontales) y columnas (líneas verticales). Se denota normalmente por A_{mxn}. Con el símbolo mxn se indica el orden de la matriz, es decir, la cantidad de filas y de columnas que posee.

Los elementos de la matriz se definen como a_{ij}, donde i es el número de fila que ocupa el elemento y j es el número de columna.

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}_{mxn}$$



21.2 Igualdad de matrices (matrices equivalentes)

Dos matrices A y B son equivalentes cuando se cumple que cada elemento a_{ij} es igual a su correspondiente b_{ij}.

Ejemplos:

1. Dadas la siguientes matrices equivalentes, halle a, b y c.

$$\begin{pmatrix} a+1 & 2 \\ b & c-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$a + 1 = 5$ $\qquad$ $c - 3 = 3$

$a = 4$ $\qquad$ $b = 6$ $\qquad$ $c = 6$

2. Dadas la siguientes matrices equivalentes, halle a, b, c, d y f.

$$\begin{pmatrix} a-5 & 3 & b+2 \\ 8 & 7 & 9 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ c+4 & 7 & d-10 \\ 0 & f+1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$a - 5 = 4$	$b + 2 = 6$	$8 = c + 4$	$9 = d - 10$	$7 = f + 1$
$a = 9$	$b = 4$	$c = 4$	$d = 19$	$f = 6$

21.3 Matrices especiales

21.3.1 Matriz cuadrada

Una matriz A_{mxn} es cuadrada si $m = n$, es decir, si tiene el mismo número de filas que de columnas. Se denota simplemente por A_n, donde n es el orden de la matriz.

Los elementos ubicados en el mismo número de fila que de columna, los de la forma a_{ii} (donde $i = j$), pertenecen a la diagonal de la matriz.

La siguiente es una matriz cuadrada de orden 4:

Observe la similitud entre la diagonal de la matriz y la diagonal de un cuadrado.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}_{4x4}$$

En este caso, los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44} forman la diagonal de la matriz. A la suma de los elementos de la diagonal se le llama la traza de la matriz ($Tr(A)$).

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44}$$

Ejemplos:

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$; $Tr(A) = 2 + 5 + 7 = 14$

2. $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 8 & 4 \\ 5 & 3 & 7 & 6 \\ 4 & 2 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$; $Tr(A) = 6 + 3 + 7 + 6 = 22$

21.3.2 Matriz diagonal

Una matriz cuadrada es diagonal cuando todos los elementos que no pertenecen a la diagonal son cero y, por lo menos, un elemento de la diagonal no es cero.

Es decir, si se cumple que $a_{ij} = 0$, si $i \neq j$; y que existe al menos un $a_{ii} \neq 0$, entonces A_n es una matriz diagonal.

La siguiente es una matriz diagonal de orden 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21.3.3 Matriz identidad

La matriz identidad de orden n (I_n) es una matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal valen 1.

Es decir, se cumple que $a_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$, y $a_{ii} = 1$ para todo $i = j$.

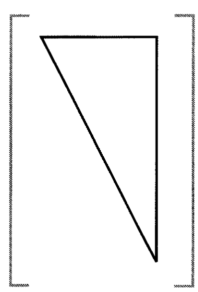
Ejemplos:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21.3.4 Matriz triangular

a. Matriz triangular superior

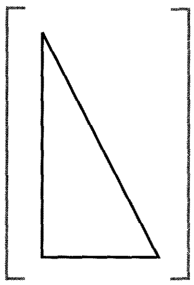
Una matriz triangular superior es una matriz cuadrada en la que todos los elementos que están a la izquierda de la diagonal valen cero.



Es decir, es una matriz cuadrada en la que se cumple que $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 9 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



b. Matriz triangular inferior

Una matriz triangular inferior es una matriz cuadrada en la que todos los elementos que están a la derecha de la diagonal valen cero.

Es decir, es una matriz cuadrada en la que se cumple que $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2/5 & 3 & 0 \\ 2 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

21.3.5 Matriz nula

Una matriz nula de orden mxn (θ_{mxn}) es aquella en la que todos sus elementos valen cero.

Es decir, es una matriz en la que se cumple que $a_{ij} = 0$ para cualquier combinación de i y j.

Ejemplos:

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

21.3.6 Matriz transpuesta

Si se invierte el orden de las filas y las columnas de una matriz A, se obtiene de la matriz transpuesta de A (A^t).

Por ello, si $B = A^t$, entonces $b_{ij} = a_{ji}$.

Ejemplos:

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, entonces $B = A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Observe que el elemento 2 ha pasado de la posición a_{12} a la posición a_{21}; de la misma manera, el elemento 3 ha pasado de la posición a_{21} a la posición a_{12}. Los elementos 1 y 4 permanecen en la misma posición porque pertenecen a la diagonal (a_{ii}).

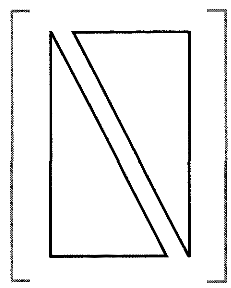
2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, entonces $B = A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Observe que todas las matrices tienen su transpuesta, no sólo las matrices cuadradas.

21.3.7 Matriz simétrica

Una matriz simétrica es aquella que es igual a su transpuesta. Para ser simétrica, una matriz necesariamente tiene que ser cuadrada.

Es decir, una matriz simétrica es aquella en la que se cumple que $a_{ij} = a_{ji}$.



Preguntas para la reflexión:
¿Son simétricas todas las matrices cuadradas?
¿Son simétricas todas las matrices identidad?

Ejemplos:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

21.4 Operaciones con matrices

21.4.1 Suma de matrices

Para sumar dos matrices, se debe cumplir que ambas sean del mismo orden. El resultado se obtiene sumando respectivamente los términos de la misma ubicación.

Así, dadas dos matrices del mismo orden A_{mxn} y B_{mxn}, la suma de A y B es otra matriz C_{mxn}, tal que para todo c_{ij} se cumple que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Ejemplos:

1. Si $A = [2 \quad 5 \quad 4]$ y $B = [6 \quad 6 \quad 6]$, entonces

$A + B = [2+5 \quad 5+6 \quad 4+6] = [8 \quad 11 \quad 10]$

2. $\quad$ Si $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$, entonces

$$A + B = \begin{pmatrix} 6+1 & 4+4 \\ 8+7 & 2+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 15 & 11 \end{pmatrix}$$

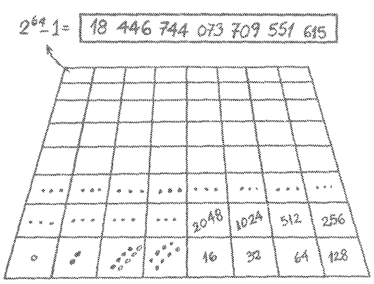
Nota: la suma de A con una matriz nula del mismo orden es igual a A.

$$A_n + \theta_n = A_n$$

21.4.2 Producto de un escalar por una matriz

Un escalar es un número cualquiera, es decir, algún elemento de algún conjunto numérico. La expresión *producto de un escalar por una matriz* indica que la matriz será multiplicada por un número cualquiera, con lo que obtendremos un múltiplo de la matriz.

Para obtener el producto de un número por una matriz, debemos multiplicar dicho número por cada uno de los elementos de la matriz.



De acuerdo con lo último, el producto rA (donde r es un escalar y A una matriz) es una matriz C, en la que para todo c_{ij} se cumple que $c_{ij} = ra_{ij}$.

Ejemplos:

1. $\quad$ Si $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ y $r = 2$, entonces

$$2A = 2\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\,.\,2 & 9\,.\,2 \\ 5\,.\,2 & 2\,.\,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 18 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$$

2. $\quad$ Si $A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ y $r = 5$, entonces

$$5A = 5\begin{pmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,.\,9 & 5\,.\,5 & 5.\,4 \\ 5\,.\,1 & 5\,.\,7 & 5.\,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 25 & 20 \\ 5 & 35 & 15 \end{pmatrix}$$

21.4.3 Producto de dos matrices

La operación de multiplicar dos matrices requiere de un proceso complejo y largo, pero cada uno de sus pasos no es difícil. Para comenzar, debemos saber que el producto de dos matrices A y B no es conmutativo, es decir, que no es lo mismo AB que BA.

Además, no todas las parejas de matrices se pueden multiplicar. Para poder multiplicar, es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual al número de filas de la segunda. En el caso de AB, es necesario que el número de columnas de A coincida con el número de filas de B.

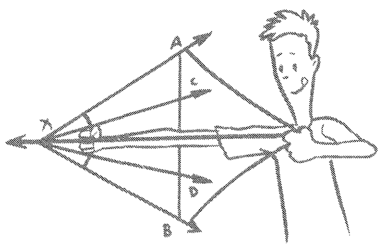
Así, A_{mxn} se podrá multiplicar por B_{pxq} solamente si $n = p$. El resultado será una matriz C_{mxq}, la cual tendrá el número de filas de A y el número de columnas de B.

Debemos multiplicar cada elemento de una fila de A por su correspondiente en la columna de B. Sumando esos productos, se obtiene un elemento de C.

Cada elemento c_{ij} se obtiene sumando todos los productos $a_{ik}b_{kj}$.

Si $A_{(2,3)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ y $B_{(3,2)} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$, entonces el producto

C será de orden 2 x 2: $C_{2.2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$



$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31}$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32}$$

Ejemplos:

1. Si $A_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $B_{(3,2)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces el producto

   C será de orden 2 x 2:

$$AB = \begin{pmatrix} (1\,.\,3 + 0\,.\,2 + 2\,.\,1) & (1\,.\,1 + 0\,.\,1 + 2\,.\,0) \\ (-1\,.\,3 + 3\,.\,2 + 1\,.\,1) & (-1\,.\,1 + 3\,.\,1 + 1\,.\,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

2. $A_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B_{(3,1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, entonces el producto

   C será de orden 2 x 1

$$AB = \begin{pmatrix} (3\,.\,1) + (4\,.\,0) + (5\,.\,2) \\ (1\,.\,1) + (0\,.\,0) + (1\,.\,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ejercicios resueltos

Dadas las matrices equivalentes, halle a, b y c.

1. $$\begin{pmatrix} a+95 & 2 \\ b-4 & c+46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 & 2 \\ 6 & 31 \end{pmatrix}$$

Solución:

$a + 95 = 125$ $\quad$ $b - 4 = 6$ $\quad$ $c + 46 = 31$

$a = 30$ $\quad$ $b = 10$ $\quad$ $c = -15$

2. $$\begin{pmatrix} \frac{11}{5} & 22 & 76 \\ c+6 & 54 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-5 & 22 & 76 \\ \frac{21}{3} & b-2 & 13 \end{pmatrix}$$

Recuerde:

$$\frac{11}{5}+5 \Rightarrow \frac{11}{5}+\frac{25}{5} \Rightarrow \frac{36}{5}$$

Solución:

$54 = b - 2$ $\quad$ $c+6=\frac{21}{3}$

$b = 56$ $\quad$ $c = 1$

3. $$\begin{pmatrix} 8/3 & 4 \\ 32 & 15/4 \\ 25 & 94 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+15 & 4 \\ 32 & b+32 \\ c+35 & 94 \end{pmatrix}$$

Solución:

$\frac{8}{3} = a+15$ $\quad$ $\frac{15}{4} = b+32$ $\quad$ $c+35 = 25$

$a = \frac{-37}{3}$ $\quad$ $b = \frac{-113}{4}$ $\quad$ $c = -10$

4. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 30 & \sqrt{2} \\ 7/2 & 100 \\ -16 & -3 \end{pmatrix}$, halle su matriz transpuesta.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 30 & \sqrt{2} \\ 7/2 & 100 \\ -16 & -3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 30 & 7/2 & -16 \\ \sqrt{2} & 100 & -3 \end{pmatrix}$$

5. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 15 & -9 & 2,5 \\ 34/7 & 7/3 & -2/7 \\ 14 & 0 & 23 \end{pmatrix}$, halle su matriz transpuesta.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 15 & -9 & 2,5 \\ 34/7 & 7/3 & -2/7 \\ 14 & 0 & 23 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 15 & 34/7 & 14 \\ -9 & 7/3 & 0 \\ 2,5 & -2/7 & 23 \end{pmatrix}$$

6. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 27 & -92 & 30 & 50 \\ 73 & 5{,}4 & 9{,}8 & 7/4 \\ 36/7 & 1{,}7 & -2{,}6 & -3/2 \end{pmatrix}$, halle su matriz transpuesta.

Solución:

$$\begin{pmatrix} 27 & -92 & 30 & 50 \\ 73 & 5{,}4 & 9{,}8 & 7/4 \\ 36/7 & 1{,}7 & -2{,}6 & -3/2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 27 & 73 & 36/7 \\ -92 & 5{,}4 & 1{,}7 \\ 30 & 9{,}8 & -2{,}6 \\ 50 & 7/4 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Desarrolle las siguientes sumas de matrices:

7. $[18 \quad 35 \quad 24] + [94 \quad 26 \quad 43]$

$= [18+94 \quad 35+26 \quad 24+43]$

$= [112 \quad 61 \quad 67]$

Recuerde que las matrices se suman miembro a miembro.
Además, para poder sumarse, deben ser del mismo orden.

8. $\begin{pmatrix} 42 & 8 \\ 41 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 \\ 7 & 5/6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 42+1/2 & 8+2/3 \\ 41+7 & 2+5/6 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 85/2 & 26/3 \\ 48 & 17/6 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 21 & 11 \\ 40 & 15 \\ 91 & 34 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 37 & 2 \\ 26 & 94 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 21+7 & 11+9 \\ 40+37 & 15+2 \\ 91+26 & 34+94 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 28 & 20 \\ 77 & 17 \\ 117 & 128 \end{pmatrix}$

Desarrolle los siguientes productos:

10. Resuelva $3/2.\begin{pmatrix} 2/5 & -3 & 10 \\ -4/8 & 9/7 & 3/2 \\ -64 & -46 & 25 \\ 13 & 20 & -9/4 \end{pmatrix}$

Solución:

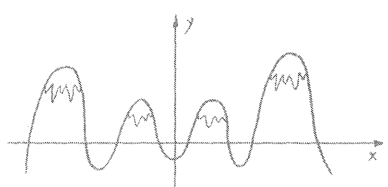
$$=\begin{pmatrix} (3/2).(2/5) & (3/2).(-3) & (3/2).(10) \\ (3/2).(-4/8) & (3/2).(9/7) & (3/2).(3/2) \\ (3/2).(-64) & (3/2).(-46) & (3/2).(25) \\ (3/2).(13) & (3/2).(20) & (3/2).(-9/4) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 3/5 & -9/2 & 15 \\ -3/4 & 27/14 & 9/4 \\ -96 & -69 & 75/2 \\ 39/2 & 30 & -27/8 \end{pmatrix}$$

11. Resuelva:

$$H=5.\begin{pmatrix} 5 & -1 & 10 \\ 10 & 4 & 3 \\ 15 & 2 & 25 \\ 20 & 20 & 4 \end{pmatrix}+1/2.\begin{pmatrix} 40 & 5 & 10 \\ -60 & 8 & 3 \\ -80 & 20 & 25 \\ 100 & 20 & -90 \end{pmatrix}.$$

Solución:



Efectuando el producto por escalar de cada una de las matrices, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 5.5 & -1.5 & 10.5 \\ 10.5 & 4.5 & 3.5 \\ 15.5 & 2.5 & 25.5 \\ 20.5 & 20.5 & 4.5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1/2.40 & 1/2.5 & 1/2.10 \\ 1/2.(-60) & 1/2.8 & 1/2.3 \\ 1/2.(-80) & 1/2.20 & 1/2.25 \\ 1/2.100 & 1/2.20 & 1/2.(-90) \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 25 & -5 & 50 \\ 50 & 20 & 15 \\ 75 & 10 & 125 \\ 100 & 100 & 20 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 20 & 2,5 & 5 \\ -30 & 4 & 1,5 \\ -40 & 10 & 12,5 \\ 50 & 10 & -45 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 45 & -.2,5 & 55 \\ 20 & 24 & 16,5 \\ 35 & 20 & 137,5 \\ 150 & 110 & -25 \end{pmatrix}$$

12. Halle AB.

a. $A_{(2,3)}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 5 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B_{(2,3)}=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

$$AB=\begin{pmatrix} (3.0+0.3+4.4)(3.3+0.9+4.0) \\ (5.0+9.3+2.4)(5.3+9.9+2.0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 & 9 \\ 35 & 96 \end{pmatrix}$$

b. $A_{(3,2)}=\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B_{(2,3)}=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 10 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Solución:

$$\begin{pmatrix} 5.3+10.10 & 5.9+10.0 & 5.6+10.1 \\ 3.3+0.10 & 3.9+0.0 & 3.6+0.1 \\ 1.3+3.10 & 1.9+3.0 & 1.6+3.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115 & 45 & 40 \\ 9 & 27 & 18 \\ 33 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

No se confunda:
usamos coma para los decimales y punto para las multiplicaciones.

13. $A_{(1,4)} = [3 \ \ 0 \ \ 2 \ \ 1]$ $\qquad B_{(4,1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

Solución:

$AB = [3 . 1 + 0 . 6 + 2 . 8 + 1 . 4] = [26]$

14. $A_{(2,4)} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad B_{(4,3)} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 10 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 7 \\ 10 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

Solución:

$$AB = \begin{pmatrix} 10.5+0.10+2.5+5.10 & 10.8+0.0+2.3+5.2 & 10.4+0.1+2.7+5.5 \\ 0.5+4.10+8.5+1.10 & 0.8+4.0+8.3+1.2 & 0.4+4.1+8.7+1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 & 96 & 79 \\ 90 & 26 & 65 \end{pmatrix}$$

15. Calcule $((A + B)(A - B))^t$,

siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Solución:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

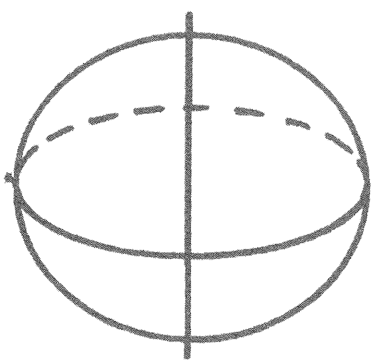
Por tanto, $((A + B)(A - B))$:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.(-1)+0.4 & 3.(-2)+0.0 \\ 0.(-1)+8.4 & 0.(-2)+8.0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 32 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $((A + B)(A - B))^t$

$$\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 32 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -3 & 32 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$



Ejercicios propuestos

1. Halle $a + b - c$.

$$\begin{pmatrix} a-120 & 2 \\ b/2 & 4c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & 2 \\ 6 & 30 \end{pmatrix}$$

R. $a = 157$, $b = 12$, $c = 7{,}5$, $a + b - c = 161{,}5$

2. Halle la suma de a, c, d y f.

$$\begin{pmatrix} a+64 & 21 & 12 & 5 \\ f-4 & 6 & b+2/3 & 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & c-1/2 & 12 & 5 \\ -72 & 6 & 81 & d+4/5 \end{pmatrix}$$

R. $a + c + d + f = -33{,}3$

3. Calcule la suma siguiente: $a + c - (60 - b)$.

$$\begin{pmatrix} a-2 & 60 \\ 40 & 71 \\ c-6/5 & 3/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 & 60 \\ b+4/9 & 71 \\ 26 & 3/8 \end{pmatrix}$$

R. $92{,}7\widehat{5}$

Halle la matriz transpuesta:

4. $$\begin{pmatrix} 64 & 111 & 9/4 & -2/7 & 34 \\ 18 & 74 & 3/21 & 24/25 & 25 \\ -22{,}4 & -82{,}2 & 3{,}14 & 6{,}36 & 72{,}4 \end{pmatrix}$$

R. $$\begin{pmatrix} 64 & 18 & -22{,}4 \\ 111 & 74 & -82{,}2 \\ 9/4 & 3/21 & 3{,}14 \\ -2/7 & 24/25 & 6{,}36 \\ 34 & 25 & 72{,}4 \end{pmatrix}$$

5. $$\begin{pmatrix} 25 & 14 & 16 & 12 \\ 2/4 & -6/7 & 29/73 & 97 \\ 46{,}54 & 81 & 36 & 49 \\ 72 & 64 & 12 & 9{,}99 \end{pmatrix}$$ R. $$\begin{pmatrix} 25 & 2/4 & 46{,}54 & 72 \\ 14 & -6/7 & 81 & 64 \\ 16 & 29/73 & 36 & 12 \\ 12 & 97 & 49 & 9{,}99 \end{pmatrix}$$

Efectúe:

6. $\begin{pmatrix} 34 \\ 7/4 \\ 9/2 \\ -72 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 53 \\ 9/7 \\ -19 \\ -48 \end{pmatrix}$ R. $\begin{pmatrix} 87 \\ 85/28 \\ -29/2 \\ -120 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 4/7 & -80 \\ 1/9 & -19 \\ 65 & 34 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/2 & -23 \\ 9/8 & -31 \\ -30 & 7/3 \end{pmatrix}$ R. $\begin{pmatrix} -13/14 & -103 \\ 89/72 & -50 \\ 35 & 109/3 \end{pmatrix}$

8. $4\begin{pmatrix} 34 \\ 4 \\ 2 \\ -72 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 55 \\ 77 \\ -10 \\ -40 \end{pmatrix}$ R. $\begin{pmatrix} 301 \\ 247 \\ -22 \\ -408 \end{pmatrix}$

9. $4\begin{pmatrix} 3 \\ 14 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} 20 \\ 3 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ R. $\begin{pmatrix} 227 \\ 137 \\ 145 \\ 74 \end{pmatrix}$

10. $x\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & 9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 8 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$ R. $\begin{pmatrix} 4x+2y & -8x-2y \\ 1x+8y & 9x-3y \\ 6x-3y & 4x+3y \end{pmatrix}$

Efectúe los siguientes productos de matrices:

Antes de pasar a esta sección, revise los ejercicios resueltos.

11. $A_{(1,4)} = [5 \quad 0 \quad 3 \quad 4]$ $B_{(4,1)} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$

R. [89]

12. $A_{(2,4)} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -12 & 15 \\ 0 & -4 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ $B_{(4,3)} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 15 & -3 & 10 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$

R. $\begin{bmatrix} -225 & 66 & -199 \\ -14 & 20 & -46 \end{bmatrix}$

13. $A_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 25 & 12 \\ 15 & 0 \end{bmatrix}$ $B_{(2,1)} = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,1 \end{bmatrix}$

R. $\begin{bmatrix} 13,7 \\ 7,5 \end{bmatrix}$

14. $A_{(3,2)} = \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ 16 & -15 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ $B_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

R. $\begin{bmatrix} 132 & 122 \\ 192 & 205 \\ 48 & 49 \end{bmatrix}$

15. $A_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 11 & 33 \\ 22 & 44 \end{pmatrix}$ $B_{(2,2)} = \begin{pmatrix} 25 & 30 \\ 35 & 40 \end{pmatrix}$

R. $\begin{pmatrix} 1430 & 1650 \\ 2090 & 2420 \end{pmatrix}$

16. Calcule $((A + B)(A - B))^t + A^t$

siendo $A = \begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 20 & 14 \end{pmatrix}$ R. $\begin{pmatrix} 30 & 550 \\ -444 & 18 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$

17. Una fabricante de puertas, ventanas y armarios escribe su utilidad anual (en miles de dólares) para cada categoría, en un vector como

$$P = \begin{bmatrix} 248 \\ 319 \\ 532 \end{bmatrix}$$

Sus costos fijos de producción pueden describirse mediante el vector

$$C = \begin{bmatrix} 40 \\ 30 \\ 60 \end{bmatrix}$$

Calcular la nueva estructura de precios que genera un ingreso del 80% del precio del competidor, con posibilidad de duplicar sus ganancias.

R. 670; 835; 1405 (en miles de dólares)

Recuerde que a las matrices columna se les denomina también vectores.

18. Un agente de bolsa vendió a un cliente 200 acciones tipo A, 300 tipo B, 500 tipo C y 250 tipo D. Los precios por acción de A, B, C y D son \$100, \$150, \$200 y \$300, respectivamente. A partir de un vector fila que represente el número de acciones compradas de cada tipo, y de un vector columna que represente el precio por acción de cada tipo, y utilizando la multiplicación de matrices, encuentre el costo total de las acciones.

R. 240 000

19. Una tienda de mascotas tiene 6 gatitos, 10 perritos y 7 loros en exhibición. Si el valor de un gatito es de \$55, el de cada perrito es de \$150 y el de cada loro es de \$35, por medio de la multiplicación de matrices, determine el valor total del inventario de la tienda de mascotas.

R. \$2075

20. Suponga que en 1998 el estado del uso de la tierra en una ciudad de 100 km, en la cual no se incluirá migración, viene dada por:

I	Residencialmente usada	30
II	Comercialmente usada	20
III	Industrialmente usada	50

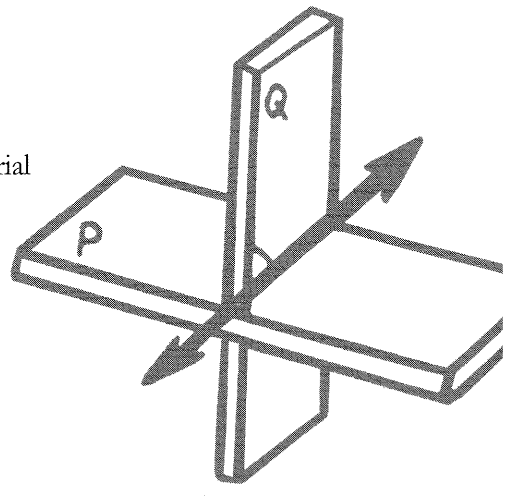
Encuentre los estados en los que se encontrará la ciudad en los años 2003, 2008 y 2013, asumiendo que las probabilidades de transición para intervalos de 5 años vienen dadas por la matriz:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{a I} & \text{a II} & \text{a III} \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{desde I} \\ \text{desde II} \\ \text{desde III} \end{array} \end{array}$$

Nota: una matriz cuadrada con números enteros no negativos y cuya suma de filas es igual a 1 es llamada estocástica. Por ello, A es estocástica. Un proceso estocástico en el cual la probabilidad de entrar a un determinado estado depende únicamente de la última situación es un proceso de Markov.

R.

2003: 26% Residencial – 22% Comercial – 50% Industrial
2008: 23% Residencial – 23,2% Comercial – 53,8% Industrial
2013: 20,72% Residencial – 23,92% Comercial – 55,36% Industrial



Capítulo 22
DETERMINANTES

Sólo las matrices cuadradas poseen determinante.

22.1 Definición

El determinante es un valor numérico fijo asociado a una matriz cuadrada. Dada una matriz A, el determinante de A se denota por $|A|$. Si $|A| \neq 0$, entonces se dice que A es una matriz regular; si $|A| = 0$, entonces A es una matriz singular.

22.2 Cálculo del determinante

22.2.1 Determinante de una matriz de segundo grado

El determinante de una matriz de segundo grado se obtiene de la resta entre el producto de los elementos de la diagonal y el producto de los otros dos elementos.

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

Ejemplos:

1. Calcule el determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Solución:

$|A| = 2 \,.\, 4 - 3 \,.\, 5 = 8 - 15 = -7$

2. Calcule el determinante.

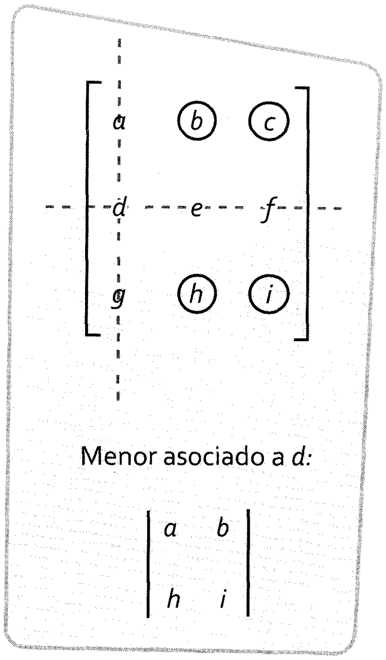
$$|A| = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{16}{3} & -2\sqrt{3} \end{vmatrix} = (\sqrt{3})(-2\sqrt{3}) - \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{16}{3}\right) = -6 - 4 = -10$$

22.2.2 Menor de un elemento de una matriz

El menor de un elemento a_{ij} de una matriz es el determinante de la matriz que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de la matriz original.

Así, dada la matriz A, tendremos que a cada elemento de A se le asociará un menor.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ tendremos los siguientes menores:}$$



$$m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \; m_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \; m_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

$$m_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \; m_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; \; m_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

$$m_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; \; m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; \; m_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

Estos determinantes pueden calcularse fácilmente con el método anterior.

Ejemplo:

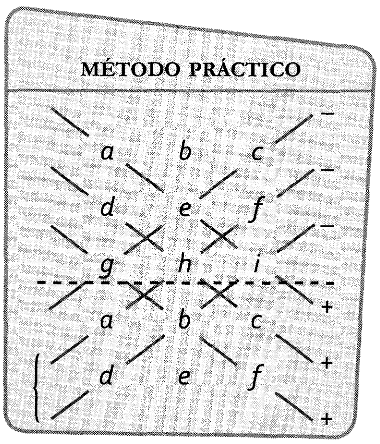
Calcule los menores de la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
m_{11} &= (1)(0) - (2)(-5) = 10 \\
m_{12} &= (1)(0) - (-1)(-5) = -5 \\
m_{13} &= (1)(2) - (-1)(1) = 3 \\
m_{21} &= (2)(0) - (2)(3) = -6 \\
m_{22} &= (1)(0) - (-1)(3) = 3 \\
m_{23} &= (1)(2) - (-1)(2) = 4 \\
m_{31} &= (2)(-5) - (1)(3) = -13 \\
m_{32} &= (1)(-5) - (1)(3) = -8 \\
m_{33} &= (1)(1) - (1)(2) = -1
\end{aligned}$$

Nota: en el caso de una matriz de orden n, los menores serán determinantes de orden $n - 1$. Considerando esto, necesitaremos entonces un método para calcular determinantes de matrices de orden mayor a 2x3.

22.2.3 Determinante de una matriz de tercer grado (*Método de Sarros*)



Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, el determinante $|A|$ se obtiene a partir de la siguiente fórmula:

$$|A| = (aei + dhc + gbf) - (dbi + ahf + gec)$$

22.2.4 Determinante por el método de cofactores

a. Matriz de cofactores

Si construimos una matriz M cuyos elementos sean los menores de una matriz A, tendremos:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Cofactor asociado a d:

$$Cof = -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix}$$

El signo negativo se debe, en este caso, a la posición del elemento d

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Llamaremos un menor positivo a aquel que está ubicado en una posición par. Una posición par es aquella cuyos subíndices sumados dan un número par. De la misma manera, llamaremos un menor negativo a aquel que está ubicado en una posición impar. Una posición impar es aquella cuyos subíndices sumados dan un número impar. Si colocamos los signos a los menores, obtendremos:

$$C = \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{12} & m_{13} \\ -m_{21} & m_{22} & -m_{23} \\ m_{31} & -m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

A esta matriz se le llama matriz de cofactores.

Un cofactor c_{ij} se obtiene a partir del menor m_{ij} mediante la siguiente relación:

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}(m_{ij})$$

b. Obtención del determinante por el método de cofactores

Para obtener el determinante de una matriz, debemos escoger cualquier fila o columna y sumar cada elemento de dicha fila (o columna) por su correspondiente cofactor. La suma de estos productos será el determinante de la matriz.

Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ cuya matriz de cofactores es:

$C = \begin{pmatrix} m_{11} & -m_{12} & m_{13} \\ -m_{21} & m_{22} & -m_{23} \\ m_{31} & -m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$, el determinante de A se obtiene (por ejemplo) de la suma:

$$|A| = a_{11} \cdot m_{11} + a_{12} \cdot (-m_{12}) + a_{13} \cdot m_{13}$$

Para el ejemplo de arriba, hemos escogido la primera fila de la matriz. Sin embargo, bien podríamos haber escogido cualquier fila o columna. Veamos esto último.

Ejemplo:

Calcule $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

Solución: en este ejercicio nos conviene tomar la primera columna, pues posee varios ceros que simplificarán las operaciones.

Resuelva este ejercicio por el método de Sarros. Verá que obtiene el mismo resultado.

$$= (0)\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

Por lo tanto,

$$|A| = -\,[(4)(-5) - (3)(3)] = 29$$

Nota: si la matriz es de un orden mayor a 3, se deberá obtener sucesivamente menores hasta llegar a menores de orden 3.

22.3 Adjunta de una matriz

La adjunta de una matriz ($Adj\,A$) es la transpuesta de la matriz de cofactores de A.

Ejemplos:

1. Calcule la adjunta de la siguiente matriz: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Solución:

Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Calcularemos primero la matriz de los cofactores de A.

Los cofactores son: $\begin{matrix} C_{11} = \;\;|3| = \;\;3; & C_{12} = -|1| = -1 \\ C_{21} = -|1| = -1; & C_{22} = \;\;|2| = \;\;2 \end{matrix}$

Obtenemos $\quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$

$$Adj\,A = C^{T} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Calcule la matriz adjunta de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

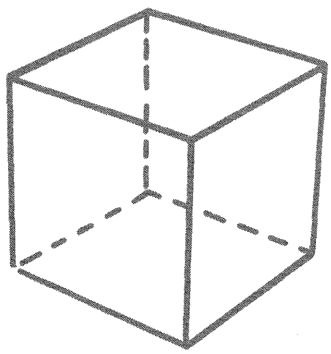
Solución:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Para la solución de este problema, se representará la matriz de cofactores de la siguiente manera:

$$C = Cofact\, A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^T = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$



22.4 Matriz inversa

22.4.1 Definición

Dada una matriz A, si existe una matriz B tal que $AB = I$ (recuerde que I es la matriz identidad), se dice que B es la inversa de A, y se denota por $B = A^{-1}$

22.4.2 Cálculo de la matriz inversa

La matriz A^{-1} se obtiene dividiendo la matriz adjunta de A entre el determinante de A.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$$

Observando la fórmula, podemos deducir que para que exista A^{-1}, $|A|$ debe ser diferente de cero, es decir, A debe ser una matriz regular.

Ejemplos:

1. Calcule la inversa de la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

Solución:

Para saber si la matriz A admite inversa, se calcula el determinante de A; pues en el caso de valer 0, la matriz A no admitirá inversa.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= [2.9 - 3.4] - [1.9 - 1.3] + [1.4 - 1.2] = [6] - [6] + [2] = 2$$

Como el determinante es distinto de 0, para obtener la matriz inversa de la matriz A se puede emplear la siguiente ecuación:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)$$

Donde A^{-1} es la matriz inversa de A y $adj(A)$ es la matriz adjunta de A.

Calculemos la matriz de los cofactores:

$$C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 2 \\ -5 & 8 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C^t = Adj\ A \qquad c^T = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa resultante será:

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 3 & -2{,}5 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -1{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

2. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad y \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule la matriz X que verifique la ecuación $A \times B = 2C$

Solución:

Se verifica si $A^{-1}AXBB^{-1} = X = A^{-1}2CB^{-1}$

$$X = A^{-1}2CB^{-1}$$

No olvide el método abreviado pasa el cálculo del determinante de una matriz de 2 x 2:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Resolvemos como una ecuación. Pero, ¡cuidado!, recuerde que la multiplicación no es conmutativa.

$$A \times B = 2C$$

$$(A^{-1})\ A \times B(B^{-1}) = (A^{-1})\ 2C(B^{-1})$$

$$x = A^{-1}\ 2CB^{-1}$$

Hallando las matrices de cofactores de A y B, tenemos:

$$CofactA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad CofactB = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$CofactA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \qquad CofactB^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -4 \qquad |B| = -4$$

Por definición de matriz inversa, establecemos:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\ A$$

Así se tiene $A^{-1}\begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}$, $B^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Recuerde que es necesario comenzar la multiplicación de izquierda a derecha, ya que la multiplicación de matrices no es conmutativa.

22.5 Transformaciones elementales

22.5.1 Definición

Una matriz es de rango r si al menos uno de sus menores es de orden r. Las transformaciones elementales son operaciones que no alteran su orden ni su rango.

Las transformaciones elementales son las siguientes:

1. El intercambio de posición entre dos filas o columnas.
2. El producto de todos los elementos de una fila (o columna) por un escalar distinto de cero.
3. La suma de los elementos de una fila (o columna) con sus correspondientes de otra fila (o columna).

Las matrices B que se obtienen de aplicar transformaciones elementales a una matriz A se denominan «equivalentes a A». Esta relación se denota $A \sim B$.

Mediante transformaciones elementales, podemos verificar si una matriz es regular o no; es decir, podemos saber si su determinante es o no es igual a cero y, por tanto, podemos saber si es inversible. Si al realizar transformaciones elementales todos los elementos de una fila o columna se anulan, el determinante de la matriz es cero; de lo contrario, el determinante será diferente de cero.

22.5.2 Cálculo de la matriz inversa

Para calcular la inversa de una matriz mediante transformaciones elementales, existe un procedimiento llamado método de Gauss-Jordan. Este consiste en ampliar la matriz original A anexándole una matriz identidad del mismo rango. Mediante transformaciones elementales que afecten a toda la matriz ampliada, debemos convertir la matriz A en una matriz identidad. Así, la matriz identidad original se habrá convertido en la matriz inversa de A.

Ejemplos de cálculo de la matriz Inversa por el método de Gauss-Jordan:

Se comienza por $(A \mid I)$ y se termina por $(I \mid A^{-1})$

1. Dada $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, encuentre la matriz inversa utilizando el método de Gauss-Jordan.

   Solución:

   Se propone la matriz $(A|I)$ y se procede a obtener la matriz $(I|A^{-1})$ utilizando el método de Gauss-Jordan.

$$(A \mid I)=\left(\begin{array}{cc|cc}2 & 3 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)_{1/2f1;}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right)_{f2-3f1;}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1\end{array}\right)_{-f2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 3 & -2\end{array}\right)_{f1-3/2f2;}\quad\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -4 & 3\\ 0 & 1 & 3 & -2\end{array}\right)$$

   Por lo que la matriz inversa obtenida es:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 3 & -2\end{pmatrix}$$

2. Dada la siguiente matriz, obtenga su matriz inversa por el método de Gauss-Jordan:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

   Solución:

   Se propone la matriz $(A|I)$ y luego, se procede a obtener la matriz $(I|A^{-1})$ utilizando el método de Gauss-Jordan: $_{f1}$

$$(A \mid I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)_{f2+2f1;}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 3 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)_{f3-2f1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -5 & -2 & 0 & 1\end{array}\right)_{f3+2f2;}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1\end{array}\right)_{f1+f3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1\end{array}\right)_{f2+2f3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 6 & 5 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1\end{array}\right)$$

Por lo que la matriz inversa obtenida es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

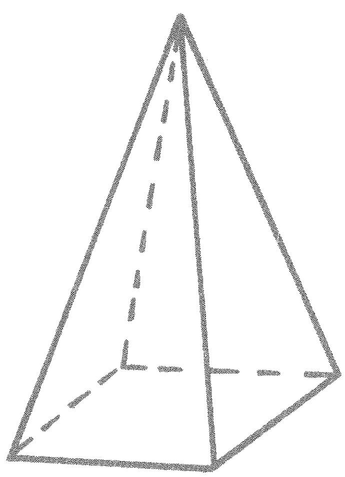
Ejercicios resueltos

1. Resuelva el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Solución:

Emplearemos el método de los cofactores, pero antes aplicaremos algunas operaciones elementales. Así, lograremos convertir en ceros ciertos elementos de filas o columnas, con el fin de facilitar los cálculos.



$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}_{f2\,-2f1 \text{ y } f3-3f1} \quad \text{Así, tenemos entonces} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Aplicamos el método de cofactores a la tercera columna:

$$+3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3(2\ .\ 2 - 4\ .\ 1) = 3\ .\ 0 = 0$$

2. Calcule el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

Solución:

Realizamos operaciones elementales de fila para simplificar los cálculos:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}_{f2-2f1} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

Por medio de los cofactores de la primera columna, tenemos simplemente:

$$(+1)\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}, \text{ ya que tres elementos son cero.}$$

Siempre es más conveniente buscar las columnas o filas con mayor cantidad de ceros.

Nuevamente, reduciremos nuestros cálculos simplificando por medio de operaciones elementales.

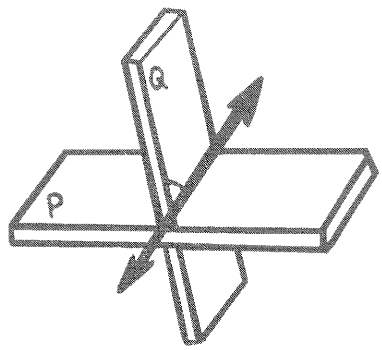
$$(+1)\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}_{f1\text{-}3f2} . \text{ Así, obtenemos: } (+1)\begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

Y por los cofactores de la primera columna, lo siguiente:

$$(+1)\begin{vmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = (+1)(-1)\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$$

Y por el método abreviado para determinantes de 2x2, lo siguiente:

(+1)(-1)(2 . (-1) - 4 . (-5)) = -18.



3. Calcule el determinante.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución:

Lo empezamos a desarrollar a través de los elementos de la columna 2, que es la que más ceros tiene, empleando el método de los cofactores. Pero antes aplicamos una operación elemental de filas.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}_{f3+f4;} \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Por cofactores de la segunda columna, obtenemos:

$$\Delta = -1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Las operaciones elementales de filas no alteran el valor del determinante, las de columnas sí.

Así, el determinante inicial se obtendrá calculado el determinante de esta matriz de 3x3. Podemos aplicar el método de Sarros:

$$\Delta = -1[(-1)(1)(1) + (-1)(1) + (3)(1)(0) - (3)(1)(1) - (-1)(-1)(0) - (1)(1)(1)]$$

$$\Delta = 6$$

4. Dada la siguiente matriz, obtenga su matriz inversa utilizando el método de la matriz adjunta:

$$A = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Solución:

De acuerdo con la definición de matriz inversa, utilizando el método de la matriz adjunta, se tiene la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} Adj\ A$$

Por lo anterior, se realizarán en primer término los cofactores de la matriz A:

$$C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Recuerde:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Por lo que la matriz C de cofactores es:

$$C = \begin{pmatrix} -18 & 28 & -8 \\ 12 & -14 & 10 \\ -3 & 21 & -6 \end{pmatrix}$$

Y con ello puede obtenerse la matriz adjunta de A, definida en la siguiente expresión:

$$Adj\ A = C^T$$

De donde se obtiene:

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} -18 & 12 & -3 \\ 28 & -14 & 21 \\ -8 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

Otro elemento importante que se debe calcular es el determinante de la matriz A:

$$A = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3(-4-14) - (0-28) + 5(0-8)$$

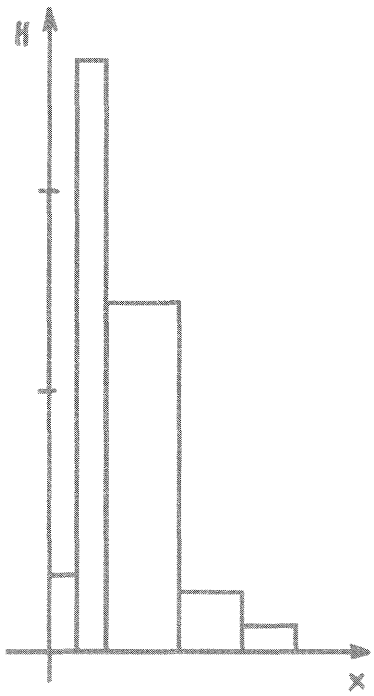
$$A = -3(18) - (-28) + 5(-8) = 54 + 28 - 40$$

$$A = 42$$

Teniendo la matriz adjunta de A y su determinante, puede obtenerse la matriz inversa A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} -18 & 12 & -3 \\ 28 & -14 & 21 \\ -8 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{14} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{21} & \frac{5}{21} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$



5. Dada la siguiente matriz, obtenga su matriz inversa utilizando el método de la matriz adjunta:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

De acuerdo con la definición de matriz inversa y utilizando el método de la matriz adjunta, se tiene la siguiente expresión:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj\ A$$

Para obtener la matriz adjunta, es necesario calcular los cofactores de la matriz A:

$$C = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Por lo que la matriz C de cofactores es:

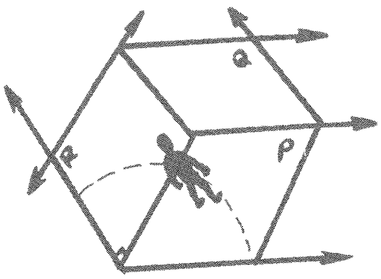
$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Y con ello puede obtenerse la matriz adjunta de A, definida en la siguiente expresión:

$$Adj\, A = B^{t}$$

Por lo que al momento de sustituir, se obtiene:

$$Adj\; A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$



Ahora debemos calcular el determinante de A.

Algunas operaciones para simplificar los cálculos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}_{f2+2f1;} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix}_{f3-2f1;} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

Y por cofactores de la primera columna, obtendremos:

$$1\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1$$

Teniendo la matriz adjunta de A y su determinante, puede obtenerse la matriz inversa A^{-1}:

$$\frac{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicios propuestos

1. Calcule el determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

R. 1

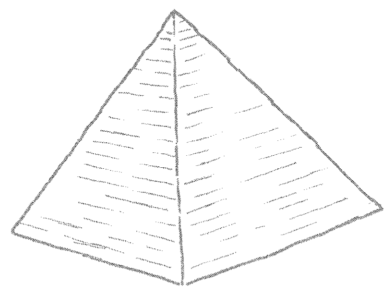
2. Demuestre $AB \neq BA$ a partir de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$.

3. Demuestre, sin realizar el desarrollo, que la ecuación

$$\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ x+a & 0 & x-c \\ x+b & x+c & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ tiene una raíz igual a cero.}$$

4. Demuestre, sin realizar desarrollo, que

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$



5. Calcule la inversa por el método de la matriz adjunta.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{R.} \begin{pmatrix} 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0,41\widehat{6} & 0,\widehat{3} & -0,25 \\ -0,08\widehat{3} & 0,\widehat{3} & 0,25 \end{pmatrix}$$

6. Calcule la inversa por el método de la inversa adjunta.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{R.} \begin{pmatrix} 12 & -2 & -15 \\ -16 & 3 & 20 \\ 5 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

7. Calcule la inversa por el método de la inversa adjunta.

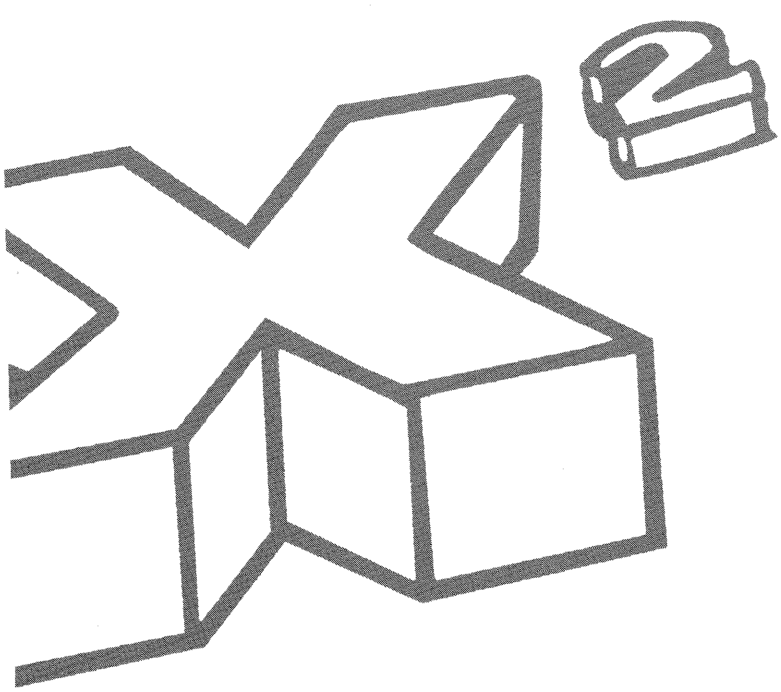
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{R.} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

8. Halle la inversa de la siguiente matriz de orden 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{R. } \begin{pmatrix} 1 & -0,\widehat{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0,\widehat{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & -0,1\widehat{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0,\widehat{3} \end{pmatrix}$$

9. Halle la inversa de la siguiente matriz por el método de la matriz adjunta.

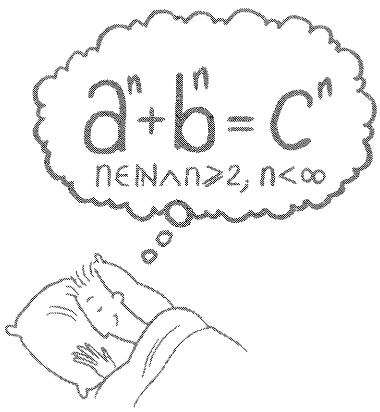
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{R. } \begin{pmatrix} -0,75 & 0,25 & 0,25 & 0,75 \\ 0,25 & 0,25 & 0,25 & -0,25 \\ -0,75 & -0,75 & 1,25 & 1,75 \\ 0,25 & -0,75 & 0,25 & 0,75 \end{pmatrix}$$



Capítulo 23
SISTEMAS DE ECUACIONES

En el capítulo 8 vimos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, pero no vimos sistemas de ecuaciones más complejos. En este capítulo, veremos cómo el manejo de las matrices nos ayudará a resolver dichos sistemas de ecuaciones complejos. Para ello, utilizaremos básicamente dos métodos, el de Cramer y el de Gauss-Jordan.

Un sistema de ecuaciones puede expresarse como una matriz de coeficientes y una matriz columna de términos independientes.



$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz&=d \\ ex+fy+gz&=h \\ ix+jy+kz&=l \end{aligned}\right\}$$

En este caso, la matriz de coeficientes será $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{pmatrix}$, donde la primera columna corresponde a las x; la segunda, a las y; y la tercera a las z.

La matriz columna de términos independientes será $B=\begin{pmatrix} d \\ h \\ l \end{pmatrix}$

23.1 Regla de Cramer

Para aplicar la regla de Cramer, debemos asegurarnos de que la matriz de coeficientes sea una matriz cuadrada y de que su determinante sea diferente de cero.

Si queremos hallar el valor de una incógnita, debemos calcular el determinante de la matriz que resulta al reemplazar la columna de la incógnita por la columna de términos independientes. Ese resultado debe dividirse entre el determinante de A; así, obtendremos el valor de la incógnita.

De esta manera, tenemos que

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ l & j & k \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ l & j & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ i & l & k \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ i & l & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & l \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}}$$

Ejemplos:

> Recuerde que para aplicar la regla de Cramer, primero debe hallar el determinante de la matriz de coeficientes.

1. Resuelva $\left.\begin{aligned} x-2y+z&=4 \\ -x+y-3z&=1 \\ 2x-y+z&=2 \end{aligned}\right\}$ empleando la regla de Cramer.

Solución:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, ya que es una matriz cuadrada, podemos aplicar la regla de Cramer.

$$(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

Luego, obtenemos un sistema de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{3}{7}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-17}{7};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-9}{7}.$$

Por tanto, la solución del sistema es $x = \frac{3}{7}$, $y = \frac{-17}{7}$, $z = \frac{-9}{7}$.

2. Resolver por Cramer: $\left.\begin{aligned} 5x - 2y + 6z &= -7 \\ x + y + 3z &= 2 \\ 2x + y &= 0 \end{aligned}\right\}$

Solución:

Sea $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 13 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, como es una matriz cuadrada, podemos aplicar la regla de Cramer.

El método de Cramer se emplea para resolver sistemas de hasta tres incógnitas.

$|A| = -33$.

Luego, obtenemos un sistema de Cramer. Entonces, tenemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-33} = \frac{33}{-33} = -1;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-33} = \frac{-66}{-33} = 2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-33} = \frac{-11}{-33} = \frac{1}{3}.$$

Por tanto, la solución del sistema es $x = -1, y = 2, z = \frac{1}{3}$.

23.2 Método de Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan consiste en ampliar la matriz de coeficientes A anexándole la matriz columna B. Para ello, mediante transformaciones elementales, debemos convertir la matriz A en una matriz triangular superior.

$$[A \mid B]$$

Del resultado anterior, podemos obtener el rango de la matriz A y el rango de la matriz ampliada. Si no coinciden los valores, el sistema no tendrá solución (será un sistema incompatible). Si los valores coinciden, llamaremos p a ese valor.

Si n es el número de incógnitas del sistema, tendremos dos posibilidades:

$n = p$; en este caso, en el sistema existe una solución única, la cual se obtendrá fácilmente despejando directamente las incógnitas, comenzando por las de la fila inferior.

$n > p$; en este caso, existen infinitas soluciones. Tendremos que introducir parámetros (incógnitas adicionales) para poder resolverlo. No llegaremos a una solución única, sino a un conjunto de soluciones que estará en función de unos parámetros.

Ejemplos:

1. Resuelva con el método de Gauss-Jordan:

$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$
$x_1 - x_3 = 1$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1$

Solución:

Sea A la Matriz de coeficientes, es decir;

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz aumentada es:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right)_{f2\leftrightarrow f1;} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right)_{f2-3f1;} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right)_{f3-2f1;}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right)_{-f2;} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \end{array}\right)_{f3+f2;} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Debido a que no se logró obtener la forma escalonada reducida de la matriz original, este sistema tiene una infinidad de soluciones ya, que

En este caso, los valores de $x1$, $x2$ y $x3$ dependen del valor que se le asigne al parámetro "t".

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 1 \\ x_2 - 5x_3 &= 1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_3 &= t \\ x_2 &= 1 + 5t \\ x_1 &= 1 + t \end{aligned}$$

2. Resuelva el siguiente sistema usando el método de Gauss-Jordan:

$4a - b + 2c = 4$
$3a + b = 5$
$a - 2b + 2c = -3$

Solución:

Sea A la matriz de coeficientes, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz aumentada es:

$$B=\left(\begin{array}{ccc|c}4&-1&2&4\\3&1&0&5\\1&-2&2&-3\end{array}\right)\xrightarrow{f1\leftrightarrow f3;}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&-3\\3&1&0&5\\4&-1&2&4\end{array}\right)\xrightarrow{f2-3f1;}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&-3\\0&7&-6&14\\4&-1&2&4\end{array}\right)\xrightarrow{f3-4f1;}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&-3\\0&7&-6&14\\1&-2&2&-3\end{array}\right)\xrightarrow{1/7f2;}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&-3\\0&1&-\frac{6}{7}&2\\0&7&-6&16\end{array}\right)\xrightarrow{f3-7f2;}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&2&-3\\0&1&-\frac{6}{7}&2\\0&0&0&2\end{array}\right)$$

Buscamos la formación de matrices escalonadas.

Debido a que $0 \neq 2$, llegamos a una contradicción y, por lo tanto, el sistema no tiene solución (observe la tercera fila).

Ejercicios resueltos

1. Resuelva, usando la regla de Cramer, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}2x+3y+3z=-9\\4x+2y+5z=-7\\-6x-5y-z=-1\end{array}\right\}$$

Solución:

Para el sistema $\left.\begin{array}{r}2x+3y+3z=-9\\4x+2y+5z=-7\\-6x-5y-z=-1\end{array}\right\}$

$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\4&2&5\\-6&-5&-1\end{pmatrix}$, como se obtiene una matriz cuadrada, podemos aplicar la regla de Cramer.

$|A| = 4 \neq 0$; luego, obtenemos un sistema de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-9&1&3\\-7&2&5\\-1&-5&-1\end{vmatrix}}{4}=\frac{54}{2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2&-9&-3\\4&-7&-5\\-6&-1&-1\end{vmatrix}}{4}=-30$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2&1&-9\\4&2&-7\\-6&-5&-1\end{vmatrix}}{4}=-11$$

2. Resuelva por el método de Cramer.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+5z+w=5 \\ x+y-3z-4w=-1 \\ 3x+6y-2z+w=8 \\ 2x+2y+2z-3w=2 \end{array}\right\}$$

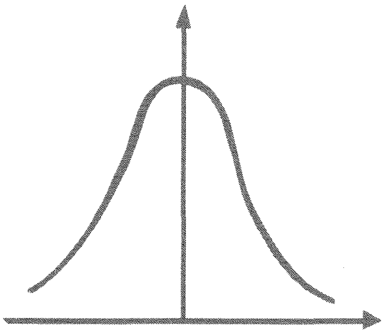
Solución:

Para el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+5z+w=5 \\ x+y-3z-4w=-1 \\ 3x+6y-2z+w=8 \\ 2x+2y+2z-3w=2 \end{array}\right\}\text{, calculamos el determinante:}$$

$$det\,A=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}=-120$$

$det\,A$ = -120



$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -4 \\ 8 & 6 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{-120}=\frac{-240}{-120}=2$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -4 \\ 3 & 8 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{-120}=\frac{-24}{-120}=\frac{1}{5}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & 6 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{-120}=\frac{0}{-120}=0$$

$$w=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 8 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{-120}=\frac{-24}{-120}=\frac{1}{5}$$

3. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} 4a - b &= 3 \\ a + 3b &= 4 \end{aligned}$$

Solución:

S es A es la matriz de coeficientes, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

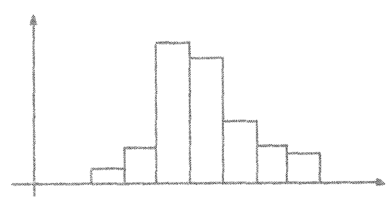
La matriz aumentada es:

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \; f1 \leftrightarrow f2; \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \; f2\text{-}4f1; \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -13 & -13 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \; f1\text{-}3f2; \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Por lo que la solución del sistema de ecuaciones es:

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ b &= 1 \end{aligned}$$



4. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de Gauss-Jordan

$$\begin{aligned} 3m + 6n &= 4 \\ m - 5n &= -1 \end{aligned}$$

Solución:

Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

La matriz aumentada del sistema es:

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 4 \\ 1 & -5 & -1 \end{array}\right) \; f1 \leftrightarrow f2; \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & -1 \\ 3 & 6 & 4 \end{array}\right) \; f2\text{-}3f1;$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 21 & 7 \end{array}\right) \; f1 1/21f2; \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

Por lo que el sistema queda como

$$\begin{aligned} m - 5n &= -1 && (1) \\ n &= 1/3 && (2) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $n = 1/3$

Sustituyendo n en (1), $\qquad m = 2/3$

5. Resuelva por el método de Gauss-Jordan el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + \ \ y + z = 50 \\ 2x - \ \ y = 1 \\ 2x - 5z = 0 \end{cases}$

Solución:

Ampliamos la matriz de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} f2\text{-}2f1; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} f3\text{-}2f1;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -7 & -100 \end{pmatrix} f3\text{-}3f2; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 17 & 102 \end{pmatrix}$$

Por lo que el sistema equivale a

$$\begin{aligned} x + y + z &= 50 \\ 0x + y - 5z &= -1 \\ 0x + 0y + 17z &= 102 \end{aligned}$$

De donde se obtiene:

$$\begin{aligned} z &= 6 \\ y &= 29 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

6. Resuelva el sistema $\begin{cases} x + 21y + \ \ z = 40 \\ 2x + \ \ y + 3z = 60 \\ 3x + \ \ 4z + 5z = 120 \end{cases}$

Solución:

Empleando el método de Gauss-Jordan:

Se consideran sólo los coeficientes, y se los coloca así:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 40 \\ 2 & 1 & 3 & 60 \\ 3 & 4 & 5 & 120 \end{array}\right)$$

Buscamos conseguir que todos los elementos por debajo de la diagonal principal sean cero.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 40 \\ 2 & 1 & 3 & 60 \\ 3 & 4 & 5 & 120 \end{array}\right) f2 - 2f1; f3 - 3f \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 40 \\ 0 & -3 & 1 & -20 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) -f3; -f2;$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 40 \\ 0 & 3 & -1 & 20 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) 3f2;\ 3f3 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 40 \\ 0 & 6 & -2 & 40 \\ 0 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right) f3 - f2$$

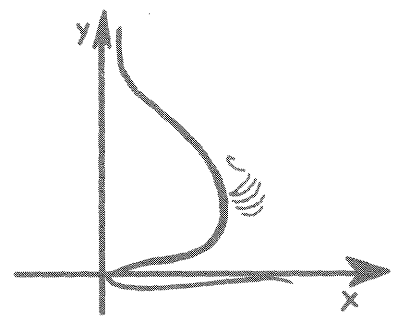
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 40 \\ 0 & 6 & -2 & 40 \\ 0 & 0 & -4 & -40 \end{array}\right)$$

El sistema que nos queda ahora es escalonado y de más fácil resolución:

$$\begin{cases} x+2y+z=40 \\ 6y-2z=40 \\ 14z=-40 \end{cases} \quad \text{y así} \quad \begin{cases} x=40-2(10)-(10) \rightarrow x=10 \\ 6y=40+2(10) \rightarrow y=10 \\ z=10 \end{cases},$$

$$\text{entonces} \quad \begin{array}{l} x=10 \\ y=10 \\ z=10 \end{array}$$

Ejercicios propuestos



Resuelva los sistemas empleando el método que resulte más conveniente

1. $\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 2x-y-2z=-2 \\ -x+2y+z=-2 \end{cases}$ R. $\begin{pmatrix} x \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{cases} x+2y-5z=4 \\ -2x+y=-3 \\ 3x-2y+z=4 \end{cases}$ R. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+t \\ 1+2t \\ t \end{pmatrix}$

3. $\begin{cases} x+5y-z=5 \\ 2x+3y-4z=1 \\ x-2y-3z=2 \end{cases}$ R. $\nexists\ x, y, z$

4. $\begin{cases} x+y-z=0 \\ -x+2y+4t=0 \\ 2x+z-t=0 \end{cases}$ R. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6p \\ -11p \\ -5p \\ 7p \end{pmatrix}$

5. $\begin{cases} x+4y-2z+t=1 \\ y-z+t=2 \end{cases}$ R. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

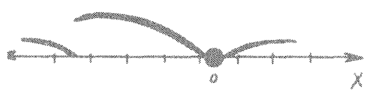
6. $\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ 2x+3y-2z=0 \\ 4x-y+z=0 \end{cases}$ R $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

7. $$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ 4x + y + z = 0 \end{cases} \qquad \text{R} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

8. $$\begin{cases} 3x - y + t = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ 5x + z + t = 0 \\ x - 2y - z + t = 0 \end{cases} \qquad \text{R.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

9. Una compañía tiene ingresos gravables por \$312 000. El impuesto federal es 25% de la parte que queda después que el impuesto estatal ha sido pagado. El impuesto estatal es 10% de la parte que queda después que el impuesto federal ha sido pagado. Encuentre el monto de los impuestos federal y estatal.

   R. \$72 000; \$24 000



10. Un fabricante produce tres artículos, A, B y C. La utilidad por cada unidad vendida de A, B y C es \$1, \$2 y \$3, respectivamente. Los costos fijos son de \$17 000 por año y los costos de producción por cada unidad son \$4, \$5 y \$7, respectivamente. El año siguiente se producirá y venderá un total de 11 000 unidades entre los tres productos y se obtendrá una utilidad total de \$25 000. Si el costo total será de \$80 000, ¿cuántas unidades de cada producto deberán producirse el año siguiente?

    R. 2000; 4000; 5000

11. Una compañía de inversiones vende tres tipos de fondo de inversión, estándar (E), de lujo (D) y Gold Star (G).

    Cada unidad de E tiene 12 acciones tipo A, 16 tipo B y 8 tipo C. Cada unidad de D tiene 20 acciones tipo A, 12 tipo B y 28 tipo C. Cada unidad de G tiene 32 acciones tipo A, 28 tipo B y 36 tipo C. Suponga que un inversionista desea comprar exactamente 220 acciones tipo A, 176 tipo B y 264 tipo C, comprando unidades de los tres fondos.

    a. Determine las combinaciones de unidades E, D y G que satisfagan los requerimientos del inversionista.

    b. Suponga que cada unidad de E cuesta al inversionista \$300 (las de D y G, \$400 y \$600 respectivamente). ¿Cuáles de las combinaciones de la parte (a) minimizarán el costo total del inversionista?

    R.

    a. Sean e, d, g el número de unidades de E, D y G, respectivamente. Las seis combinaciones están dadas por:

e	5	4	3	2	1	0
d	8	7	6	5	4	3
g	0	1	2	3	4	5

b. La combinación $e = 0$; $d = 3$ y $g = 5$

12. Resuelva los problemas utilizando la inversa de la matriz implicada.

a. Una fábrica de automóviles produce dos modelos, *A* y *B*. El modelo A requiere 1 hora de mano de obra para pintarlo y media hora de mano de obra para pulirlo, mientras el modelo B requiere de 1 hora de mano de obra para cada uno de los procesos. Durante cada hora en que la línea de ensamblado está funcionando existen 100 horas de mano de obra disponibles para pintura y 80 horas de mano de obra para pulido. ¿Cuántos automóviles de cada modelo pueden terminarse cada hora si se utilizan todas las horas de mano de obra?

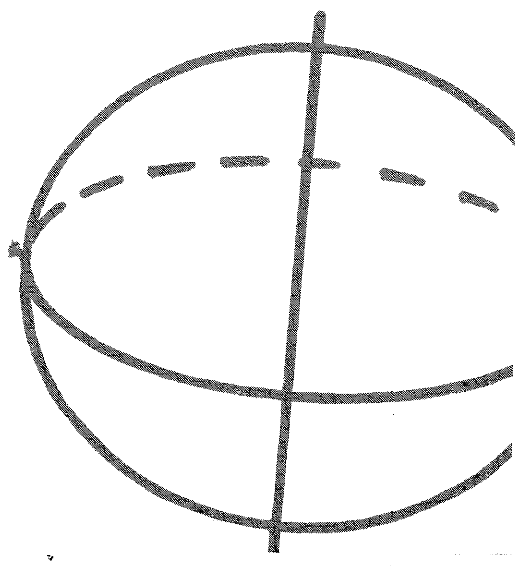
b. Suponga que cada modelo *A* requiere 10 partes de tipo 1 y 14 de tipo 2, mientras que cada modelo *B* requiere 7 partes tipo 1 y 10 de tipo 2. La fábrica puede obtener 800 partes tipo 1 y 1130 tipo. ¿Cuántos automóviles de cada modelo se producen si se utilizan todas las partes disponibles?

R.

a. 40 del modelo A y 60 del modelo B
b. 45 del modelo A y 50 del modelo B

13. Un grupo de inversionistas decide invertir \$500 000 en las acciones de tres compañías. La compañía *D* vende en \$60 una acción y tiene un rendimiento esperado de 16% anual. La compañía *E* vende en \$80 cada acción y tiene un rendimiento esperado de 12% anual. La compañía *F* vende cada acción en \$30 y tiene un rendimiento esperado de 9% anual. El grupo planea comprar cuatro veces más acciones que la compañía *F* que de la compañía *E*. Si la meta del grupo es 13,68% de rendimiento anual, ¿cuántas acciones de cada compañía deben comprar los inversionistas?

R. D: 5000 acciones; E: 1000 acciones; F: 4000 acciones.



BIBLIOGRAFÍA

CARRANZA, Víctor. *Matemática Básica.* Lima: s.e., 1994.

KINDLE, Joseph. *Geometría Analítica.* México: McGraw-Hill, 1970.

TORRES LLOSA, Cecilia (ed). *Matemáticas para Todos 5º Secundaria.* Lima: Instituto Apoyo, 2006.

SUVOROV, Iorofey. *Curso de Matemáticas Superiores.* Moscú: Mir, 1973.

MIRÓ QUESADA, Francisco. *Lógica.* Lima: Universo.

PÁGINAS WEB

Si desea investigar más, puede visitar las siguientes páginas web. Algunos de los ejercicios que hemos resuelto en este libro son similares a los que aparecen en dichas páginas. Le invitamos a revisarlas y a conocer nuevas posibilidades de solución:

http://wmatem.eis.uva.es/
Esta es una página de la Universidad de Valladolid. Siga el link de «Invitación a las matemáticas» y podrá encontrar teoría y problemas de Teoría de Conjuntos, Álgebra y Geometría Analítica.

http://soko.com.ar/
Esta es una página de la profesora argentina Silvia Sokolovsky. Si sigue el link de «Matemáticas», va a encontrar explicaciones de conjuntos, cónicas, ecuaciones, entre otros.

http://faa.unse.edu.ar/
Esta es una página de la facultad de Agronomía de la Universidad Nacional Santiago del Estero. Siga el link «Ingreso» y luego, «Apuntes on line». Ahí encontrará materiales que le servirán para el aprendizaje de la primera unidad de este libro.

http://sipan.inictel.gob.pe/av/
Esta es una página peruana. Es del instituto de investigación Inictel-UNI. A pesar de ser escolar, puede servirle para reforzar algunos conceptos.

http://huitoto.udea.edu.co/Matematicas/
Esta es una página de la Universidad de Antioquia, en Colombia. Siga el link «Contenido por unidades». Ahí encontrará teoría y ejercicios de Teoría de Conjuntos, Números Reales y Geometría Analítica.